Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV©

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
www.formav.co/explorer

Proposition de correction – BTS Mathématiques – Session 2025

En-tête

- **Session :** 2025
- **Groupement :** B
- **Code sujet :** 25MATGRB2
- **Spécialité :** Conception et industrialisation en microtechniques
- **Durée :** 2 heures
- **Calculatrice :** Autorisée (mode examen actif ou type collège)

EXERCICE 1 (10 points)

Résumé de l'énoncé

On étudie le refroidissement d'une plaque d'aluminium. La température f(t) (en °C) au bout de t minutes suit une équation différentielle, puis on exploite l'expression explicite de f(t) pour répondre à des questions de modélisation et d'interprétation.

Partie A – Équation différentielle

1. Résolution de l'équation différentielle homogène

On considère l'équation : y' + 0,25y = 0

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. On rappelle la formule fournie :

> *Équation : y' + a y = 0 → Solution : y(t) = k e^{-a t}, k \in \mathbb{R}*

Ici, a = 0,25. Donc, les solutions sont :

$$y(t) = k e^{-0,25 t}, k \in \mathbb{R}$$

Point de méthode : On résout une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre en reconnaissant la forme standard et en utilisant la solution exponentielle.
Erreur fréquente : Oublier le signe négatif dans l'exposant ou la constante d'intégration.

---

2. Recherche d'une solution constante de l'équation complète

On cherche g(t) = c solution de y' + 0,25y = 7,5.

- g'(t) = 0
- L'équation devient 0 + 0,25c = 7,5 donc c = 7,5 / 0,25 = 30

$$c = 30$$

Point de méthode : Pour trouver une solution particulière constante, on pose la dérivée nulle et on

résout l'équation algébrique.
Erreur fréquente : Ne pas remplacer y' par 0 pour une fonction constante.

---

3. Ensemble des solutions de l'équation complète

L'équation y' + 0,25y = 7,5 est linéaire du premier ordre. L'ensemble des solutions est :

- Solution générale de l'homogène : k e^{-0,25 t}
- Solution particulière : 30

Donc, toute solution s'écrit :

$$y(t) = k e^{-0,25 t} + 30, k \in \mathbb{R}$$

Point de méthode : Pour une équation différentielle linéaire non homogène, la solution générale est la somme d'une solution de l'homogène et d'une particulière.
Erreur fréquente : Oublier la constante d'intégration ou la solution particulière.

---

4. Détermination de la solution particulière avec la condition initiale

On sait que f(0) = 250. On utilise la forme générale : f(t) = k e^{-0,25 t} + 30

- À t = 0 : f(0) = k + 30 = 250 donc k = 220

Donc :

$$f(t) = 220 e^{-0,25 t} + 30$$

Point de méthode : On utilise la condition initiale pour déterminer la constante d'intégration.
Erreur fréquente : Mauvais report de la condition initiale, ou erreur de calcul lors de la résolution pour k.

Partie B – Étude de la fonction

1. Température après un quart d'heure (15 minutes)

On cherche f(15) = 220 e^{-0,25 \times 15} + 30

- 0,25 \times 15 = 3,75
- e^{-3,75} ≈ 0,0235 (à la calculatrice)
- 220 \times 0,0235 ≈ 5,17
- f(15) ≈ 5,17 + 30 = 35,17 (arrondi à 0,1°C : 35,2°C)

Après 15 minutes, la température est d'environ **35,2°C**.

Point de méthode : Remplacer t par 15 dans l'expression de f, calculer l'exponentielle puis additionner.
Erreur fréquente : Oublier d'ajouter 30, erreur de calcul d'exponentielle ou mauvaise utilisation de la calculatrice.

---

2. Limite de f en +∞ et interprétation

f(t) = 220 e^{-0,25 t} + 30

- Quand t \to +∞, e^{-0,25 t} \to 0
- Donc f(t) \to 30

Conséquence pour la courbe : y = 30 est une asymptote horizontale.

Interprétation : La température de la plaque se stabilise à **30°C** (température ambiante).

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 30$$

Point de méthode : La limite d'une exponentielle décroissante est 0, donc la fonction tend vers la constante ajoutée.
Erreur fréquente : Confondre la limite avec la valeur initiale ou oublier l'asymptote.

---

3. Dérivée et variations de f

On dérive : f(t) = 220 e^{-0,25 t} + 30

- f'(t) = 220 \times (-0,25) e^{-0,25 t} = -55 e^{-0,25 t}
- Pour tout t \geq 0, e^{-0,25 t} > 0, donc f'(t) < 0
- La fonction f est strictement décroissante sur [0 ; +\infty[

Interprétation : La température de la plaque diminue constamment au cours du temps.

f'(t) = -55 e^{-0,25 t}
La fonction f est **strictement décroissante** sur [0 ; +\infty[.

Point de méthode : Dérivée d'une exponentielle composée, puis étude du signe.
Erreur fréquente : Oublier le signe négatif ou mal appliquer la règle de dérivation.

---

4. Vérification de l'affirmation du technicien et durée pour passer sous 150°C

Le technicien affirme : « en cent secondes, la plaque a perdu cent degrés ».
Attention : 100 secondes = 1 min 40 s = 1,666... min.

- Calculons f(0) : 220 \times 1 + 30 = 250
- Calculons f(1,666...) :
  - 0,25 \times 1,666... ≈ 0,4167
  - e^{-0,4167} ≈ 0,659
  - 220 \times 0,659 ≈ 145
  - f(1,666...) ≈ 145 + 30 = 175
- Perte de température : 250 - 175 = 75 degrés

L'affirmation est donc **fausse**.

Pour trouver le temps où f(t) < 150 :

- f(t) = 220 e^{-0,25 t} + 30 < 150
- 220 e^{-0,25 t} < 120
- e^{-0,25 t} < 120 / 220 = 0,5455
- On prend le logarithme :
- -0,25 t < \ln(0,5455) ≈ -0,606

- t > -0,606 / 0,25 ≈ -2,424
- Mais comme l'exponentielle est strictement décroissante, on cherche le plus petit t tel que f(t) \leq 150.
- Calculons précisément :
- e^{-0,25 t} = 120 / 220 = 0,5455
- -0,25 t = \ln(0,5455) ≈ -0,606
- t = 0,606 / 0,25 = 2,424 minutes
- En secondes : 2,424 \times 60 ≈ 145,4 secondes
- Arrondi à la seconde : **145 secondes**

Le technicien a tort : en 100 secondes, la plaque perd environ 75°C.
La température passe sous 150°C au bout de **145 secondes** (arrondi à la seconde).

Point de méthode : Bien convertir les unités (minutes/secondes), isoler l'exponentielle, puis appliquer le logarithme népérien.
Erreur fréquente : Oublier la conversion des unités, ou se tromper dans la manipulation des inégalités avec le logarithme.

---

5. Croquis de la courbe représentative

La courbe de f(t) = 220 e^{-0,25 t} + 30 est une décroissance exponentielle partant de 250, tendant vers 30, avec une pente négative, et les points remarquables :

- f(0) = 250 (point de départ)
- f(15) ≈ 35,2 (après 15 min)
- Asymptote horizontale y = 30
- Point où f(t) = 150 : t ≈ 2,42 min

(Le croquis doit montrer la décroissance, l'asymptote, les points calculés, et indiquer la décroissance stricte.)

Point de méthode : Pour tracer une exponentielle décroissante, placer les points clés, l'asymptote, et indiquer les valeurs calculées.
Erreur fréquente : Tracer une courbe qui remonte, ou ne pas indiquer l'asymptote.

EXERCICE 2 (10 points)

Résumé de l'énoncé

On étudie un signal électrique u(t) de période \pi, défini par u(t) = t pour t \in [0 ; \pi[. On analyse ses propriétés, sa fréquence, son développement en série de Fourier, puis ses amplitudes et son spectre.

1. Calcul de quelques valeurs de u

- u(1) = 1 (car 1 ∈ [0 ; π[)
- u(π) = u(0) = 0 (par périodicité, car π ≡ 0 mod π)
- u(π + 1) = u(1) = 1 (π + 1 ≡ 1 mod π)
- u(4) = u(4 - π × 1) = u(4 - 3,14) = u(0,86) = 0,86

- u(1) = 1

- u(π) = 0
- u(π + 1) = 1
- u(4) ≈ 0,86

Point de méthode : Pour une fonction périodique, ramener l'argument dans l'intervalle de définition par soustraction de multiples de la période.
Erreur fréquente : Oublier la périodicité ou mal calculer le reste.

---

2. Croquis du signal u(t) sur trois périodes

Sur [0 ; 3\pi], le signal est une rampe qui monte de 0 à π, puis recommence à 0, etc. (Le croquis doit montrer trois « dents de scie » identiques, de 0 à π, puis 0 à π, etc.)

Point de méthode : Représenter la fonction sur chaque période, puis recopier le motif.
Erreur fréquente : Oublier la discontinuité à chaque multiple de π.

---

3. Le signal est-il alternatif ?

Un signal est alternatif si sa valeur moyenne sur une période est nulle :

- Moyenne sur [0 ; \pi] : \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2} \neq 0

Donc, **le signal n'est pas alternatif**.

Le signal u(t) n'est pas alternatif.

Point de méthode : Calculer la valeur moyenne par intégration sur une période.
Erreur fréquente : Croire que toute fonction périodique est alternative.

---

4. Fréquence et pulsation du signal

- Période T = \pi
- Fréquence f = 1 / T = 1 / \pi (en Hz)
- Pulsation \omega = 2\pi / T = 2\pi / \pi = 2 (en rad/s)

f = 1 / \pi Hz ; \omega = 2 rad/s

Point de méthode : Utiliser les formules f = 1/T et \omega = 2\pi / T.
Erreur fréquente : Inverser les formules ou oublier les unités.

---

5. Calcul des coefficients de Fourier b_n

On admet que \int_0^{\pi} t \sin(2 n t) dt = -\pi / (2n) pour n \geq 1.

Formule du coefficient : b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt

- Ici, T = \pi, \omega = 2, donc n\omega = 2n

- b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(2n t) dt = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2n} \right) = -\frac{1}{n}

Pour tout n \geq 1 : b_n = -\frac{1}{n}

Point de méthode : Bien appliquer la formule du coefficient de Fourier, attention aux facteurs.
Erreur fréquente : Oublier de multiplier par 2 / T ou mal utiliser l'intégrale donnée.

---

6. Calcul des amplitudes A_n et remplissage du tableau

- On a a_n = 0 pour n \geq 1
- A_0 = |a_0| (calculé plus haut : a_0 = \pi / 2)
- Pour n \geq 1 : A_n = |b_n| = 1 / n

n	0	1	2	3	4
Valeur exacte de A_n	\pi / 2	1	1/2	1/3	1/4
Valeur approchée à 10^{-2} près	1,57	1,00	0,50	0,33	0,25

Point de méthode : Les amplitudes sont les valeurs absolues des coefficients.
Erreur fréquente : Oublier de prendre la valeur absolue ou mal arrondir.

---

7. Analyse des spectres

7.a. **Pourquoi le Spectre 2 ne peut pas être celui de u(t) ?**
Le spectre 2 présente des amplitudes nulles pour certains n (par exemple, pour n = 2). Or, pour u(t), tous les A_n pour n \geq 1 sont non nuls.

Le Spectre 2 ne peut pas être celui de u(t) car il comporte des amplitudes nulles pour certains n, ce qui n'est pas le cas ici.

7.b. **Pourquoi le Spectre 3 ne peut pas être celui de u(t) ?**
Le spectre 3 montre des amplitudes A_n qui augmentent avec n, alors que pour u(t), elles décroissent comme 1/n.

Le Spectre 3 ne peut pas être celui de u(t) car les amplitudes A_n augmentent avec n, au lieu de décroître.

Point de méthode : Pour reconnaître un spectre, observer la décroissance ou la nullité des amplitudes.
Erreur fréquente : Confondre la décroissance avec la croissance, ou ne pas regarder tous les n.

Formulaire récapitulatif

- y' + a y = 0 → y(t) = k e^{-a t}
- Équation différentielle linéaire du premier ordre : solution générale = solution homogène + solution particulière
- Valeur moyenne sur une période T : \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt

- Fréquence : f = 1 / T
- Pulsation : \omega = 2\pi / T
- Développement en série de Fourier :
    - a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt
    - a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt
    - b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt
    - A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}
- Limite d'une exponentielle décroissante : \lim_{t \to +\infty} k e^{-a t} = 0

Conseils généraux pour réussir l'épreuve de mathématiques en BTS

1. **Lisez attentivement chaque question** : repérez les données, les unités et les objectifs de chaque partie avant de commencer à rédiger.
2. **Justifiez chaque étape** : expliquez vos calculs, citez les formules ou théorèmes utilisés, même pour des étapes simples.
3. **Soignez les conversions d'unités** : vérifiez toujours si les temps sont en secondes ou en minutes, et adaptez vos calculs en conséquence.
4. **Encadrez les résultats finaux** : cela facilite la correction et montre que vous savez présenter une réponse claire.
5. **Relisez-vous et vérifiez vos calculs** : une erreur d'étourderie peut coûter de nombreux points, surtout sur les calculs d'exponentielles ou de logarithmes.

© FormaV EI. Tous droits réservés.

Propriété exclusive de FormaV. Toute reproduction ou diffusion interdite sans autorisation.

Copyright © 2026 FormaV. Tous droits réservés.

Ce document a été élaboré par FormaV© avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV©, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV© se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.

Copyright © 2026 FormaV. Tous droits réservés.

Ce document a été élaboré par FormaV© avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV©, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV© se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.