Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2017 • Code sujet : **MATGRC1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf Innovation textile : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation de la croissance du volume de bois fort d'un Douglas (14 questions) **Page 3**

2. Production et contrôle de conformité de coques de manettes (11 questions) **Page 8**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://bts-cpi.fr/assets/annales/bts-cpi/E2 - Mathématiques/2017/BTS CPI - E2 - Mathématiques - Session 2017 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation de la croissance du volume de bois fort d'un Douglas

L'exercice étudie le volume de bois fort d'un plant de Douglas en fonction de son âge, à partir de données de cubage. Il compare un modèle statistique fondé sur un ajustement affine et un modèle dynamique décrit par une équation différentielle.

Partie 1 : Modèle statistique

Question 1). À partir des âges et volumes fournis, compléter dans l'annexe 1 le tableau des valeurs de Q = ln(7/V − 1), arrondies au centième.

On calcule chaque valeur avec $Q = \ln(7/V - 1)$, puis on arrondit au centième. Les valeurs déjà inscrites dans le tableau sont cohérentes : pour $V = 0{,}09$, on obtient $4{,}34$, et pour $V = 0{,}51$, $2{,}54$. Il reste à calculer les valeurs correspondant aux volumes de 0,19 et 2,11 m³, puis à compléter les deux cases de l'annexe.

Annexe 1 complétée

t (en années)	10	20	30	50
V (en m^3)	0,09	0,19	0,51	2,11
Q	4,34	3,58	2,54	0,84

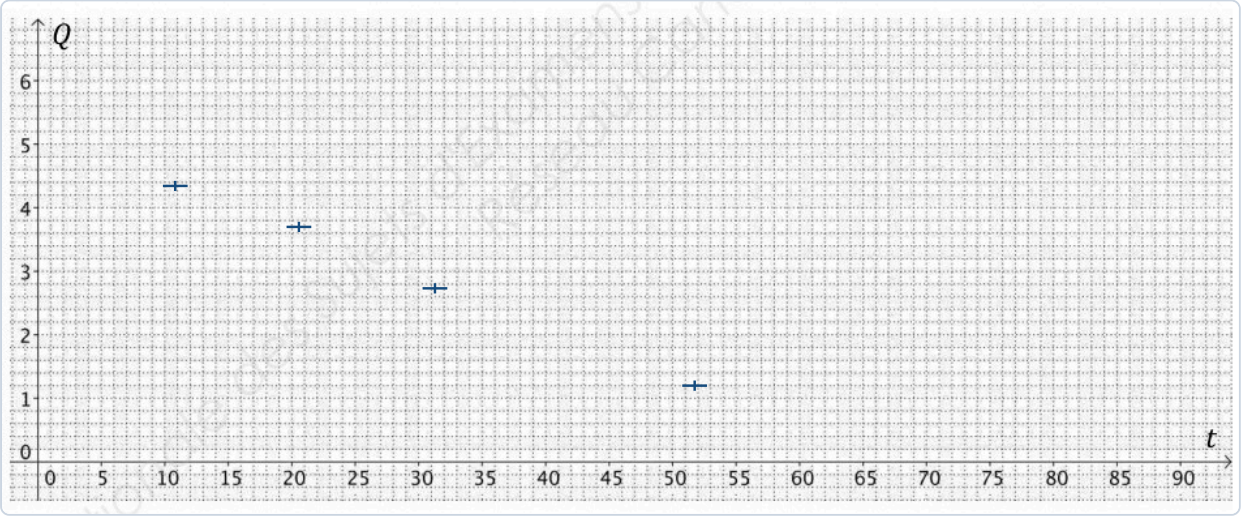
✓ RÉPONSE À RETENIR

Ligne Q : 4,34 ; 3,58 ; 2,54 ; 0,84.

Question 2). Représenter dans le repère de l'annexe 2 le nuage de points de la série statistique constituée des variables t et Q.

Les abscisses sont les âges t, et les ordonnées sont les valeurs de Q du tableau complété. Dans le repère de l'annexe 2, placer les quatre couples correspondants. Il s'agit d'un nuage statistique : les points restent isolés, sans être reliés. Les positions du visuel sont reportées sur les graduations du repère fourni.

Nuage de points (t ; Q)



✓ RÉPONSE À RETENIR

Points : $(10; 4{,}34)$, $(20; 3{,}58)$, $(30; 2{,}54)$, $(50; 0{,}84)$.

Question 3). À partir des résultats affichés par la calculatrice, donner une équation de la droite d'ajustement de Q en t par la méthode des moindres carrés, en arrondissant les coefficients au millième.

L'écran fournit la droite de régression sous la forme $Q = at + b$, avec $a = -0{,}088616$ et $b = 5{,}262999$. On arrondit chacun de ces coefficients au millième : le coefficient directeur devient $-0{,}089$ et l'ordonnée à l'origine $5{,}263$. On les reporte dans l'équation de la droite d'ajustement de Q en t.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$Q = -0{,}089t + 5{,}263$.

Question 4). En utilisant l'ajustement affine obtenu, déterminer la valeur prévisible de Q lorsque t = 80.

On évalue la droite obtenue à la question précédente en remplaçant t par 80. Avec les coefficients arrondis au millième, le calcul est $-0{,}089 \times 80 + 5{,}263$. Le résultat est la valeur prévisible de Q pour un âge de 80 ans selon l'ajustement affine.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour $t = 80$, $Q \approx -1{,}857$.

Question 5). À partir de l'ajustement, déterminer le volume de bois fort que l'on peut espérer tirer de ce plant de Douglas lorsqu'il aura 80 ans.

La relation $Q = \ln(7/V - 1)$ donne $e^Q = 7/V - 1$, donc $V = 7/(1 + e^Q)$. On utilise la prévision de la question précédente, $Q(80) = -1{,}857$, dans cette expression. Le volume est exprimé en mètres cubes et le résultat est arrondi au centième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

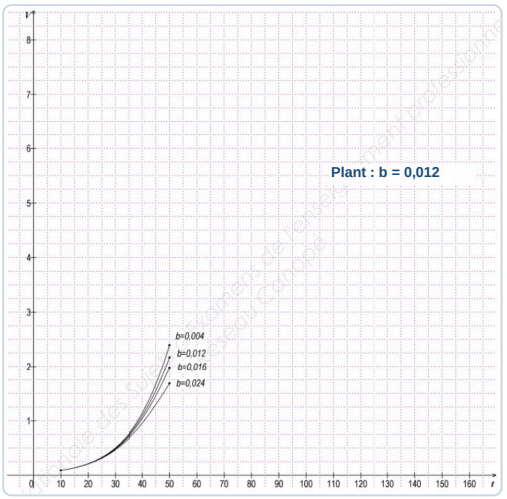
Volume prévisible à 80 ans : environ 6,05 m³.

Partie 2 : Modèle dynamique

Question 1). À l'aide du graphique de l'annexe 3, expliquer pourquoi on peut choisir b = 0,012 comme valeur de b pour le plant de Douglas étudié.

Le tableau donne le volume du plant à 50 ans : $2{,}11\ \text{m}^3$. Sur l'annexe 3, on compare ce point aux courbes correspondant aux différentes valeurs de b. La courbe étiquetée $b = 0{,}012$ passe au voisinage du point $(50; 2{,}11)$. Elle est donc celle qui correspond au plant étudié.

Valeur de b correspondant au plant étudié



✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe compatible avec $V(50) = 2{,}11\ \text{m}^3$ est celle de $b = 0{,}012$.

Question 2) a). Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E0) : y′ + 0,088y = 0.

L'équation homogène s'écrit $y' = -0{,}088y$. Une fonction dont la dérivée est proportionnelle à elle-même est une exponentielle : les solutions sont donc de la forme $Ce^{-0{,}088t}$. La constante C peut être n'importe quel réel. On considère ces fonctions sur l'intervalle demandé, $[10; +\infty[$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y(t) = Ce^{-0{,}088t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2) b). Démontrer que la fonction constante g, définie sur [10 ; +∞[par g(t) = 0,012/0,088, est une solution particulière de l'équation différentielle (E) : y′ + 0,088y = 0,012.

La fonction g est constante, donc $g'(t) = 0$. En la remplaçant dans le membre de gauche de (E), on obtient $g'(t) + 0{,}088g(t) = 0 + 0{,}088 \times (0{,}012/0{,}088) = 0{,}012$. Cette expression est bien égale au second membre de (E), pour tout $t \in [10; +\infty[$. Ainsi, g est une solution particulière.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$g(t) = \dfrac{0{,}012}{0{,}088}$ est une solution particulière de (E).

Question 2) c). En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

Les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant une solution de l'équation homogène (E0) à une solution particulière de (E). D'après les deux questions précédentes, ces fonctions sont la somme de $Ce^{-0{,}088t}$ et de la constante $0{,}012/0{,}088$. Le réel C est arbitraire.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y(t) = Ce^{-0{,}088t} + \dfrac{0{,}012}{0{,}088}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2) d). Calculer f(10), puis déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) correspondant au plant de Douglas étudié.

Comme $f(t) = 1/V(t)$, la donnée à 10 ans donne $f(10) = 1/0{,}09$. Dans la solution générale, on impose cette valeur à $t = 10$, ce qui donne $C = (1/0{,}09 - 0{,}012/0{,}088)e^{0{,}088\times 10}$. On obtient ainsi la solution correspondant au plant, avec des coefficients arrondis pour la présenter.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(10) = 11{,}11$ et $f(t) \approx 26{,}46e^{-0{,}088t} + 0{,}13636$.

Question 3) a). À partir de l'expression donnée de V(t), calculer le volume de bois fort que l'on peut espérer obtenir du plant lorsqu'il aura 80 ans.

On utilise l'expression fournie dans l'énoncé, $V(t) = 1/(26{,}4e^{-0{,}088t} + 0{,}14)$. Pour un âge de 80 ans, on remplace t par 80 dans l'exponentielle, puis on calcule l'inverse du dénominateur. Le résultat est arrondi au centième de mètre cube.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$V(80) \approx 6{,}13\ \text{m}^3$.

Question 3) b). Expliquer pourquoi la courbe représentative de la fonction V admet une asymptote horizontale et en donner une équation.

Quand t tend vers $+\infty$, le terme $e^{-0{,}088t}$ tend vers 0. Le dénominateur de $V(t)$ tend alors vers $0{,}14$, donc $V(t)$ tend vers $1/0{,}14$. La courbe admet ainsi une asymptote horizontale d'ordonnée égale à cette limite.

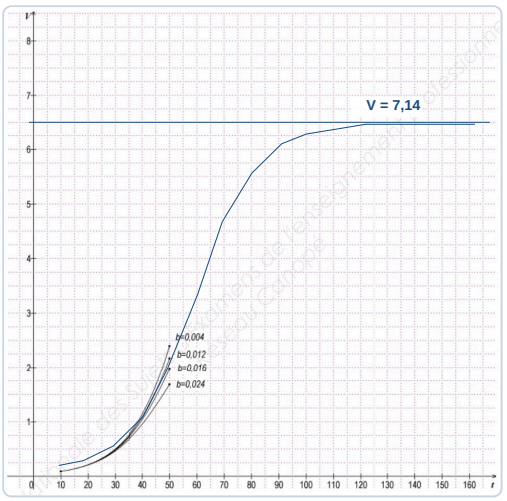
✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $V = 1/0{,}14 \approx 7{,}14$.

Question 3) c). Tracer l'asymptote sur le graphique de l'annexe 3 et compléter la courbe représentative de la fonction V. L'étude des variations de V n'est pas demandée.

L'asymptote a pour équation $V = 1/0{,}14$, soit environ $V = 7{,}14$. Sur l'annexe, tracer cette droite horizontale, puis compléter la courbe de la fonction donnée. Elle part près du point correspondant à 10 ans et 0,09 m³, passe près de $(50 ; 2{,}11)$, puis se rapproche de l'asymptote par-dessous.

Asymptote et courbe V(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

Tracer l'asymptote $V = 7{,}14$ et la courbe de $V(t)$, croissante et s'en rapprochant par-dessous.

Question 4). L'Office National des Forêts conseille de commercialiser les Douglas lorsqu'ils ont atteint 85 % de la valeur limite de leur volume de bois fort. Déterminer à quel âge ce conseil s'applique au plant étudié.

La valeur limite du volume est $L = 1/0{,}14$. Il faut donc résoudre $V(t) = 0{,}85L = 0{,}85/0{,}14$, avec l'expression de la question 3. On isole l'exponentielle dans $1/(26{,}4e^{-0{,}088t} + 0{,}14) = 0{,}85/0{,}14$, puis on prend le logarithme. L'âge obtenu est d'environ 79 ans.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La commercialisation est conseillée vers 79 ans.

2. Production et contrôle de conformité de coques de manettes

Une entreprise fabrique par injection plastique les demi-coques supérieure et inférieure des manettes d'une console, puis les assemble. Les questions mobilisent la loi normale, un test d'hypothèse unilatéral et la loi binomiale pour étudier la conformité des pièces et des lots de manettes.

Partie 1 : Production

Question Production. La masse X d'une demi-coque supérieure suit une loi normale d'espérance 63 g et d'écart-type 0,45 g. Une pièce est conforme si sa masse est supérieure à 62 g. Calculer la probabilité qu'une demi-coque choisie au hasard soit conforme.

On centre et réduit : $P(X > 62) = P\left(Z > \frac{62-63}{0{,}45}\right) = P(Z > -2{,}22) = P(Z < 2{,}22)$. La table de la loi normale donne environ $0{,}9869$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $P(X > 62) \approx 0{,}9869$, soit 98,69 %.

Partie 2 : Contrôle de la conformité

Question 1). Pour le test unilatéral dont l'hypothèse alternative est H1 : m < 63, donner l'hypothèse nulle H0.

L'hypothèse alternative décrit une baisse. L'hypothèse nulle correspond à la moyenne de référence, avant dérèglement de la presse.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $H_0 : m = 63$ g.

Question 2). Parmi les propositions a), b) et c), recopier l'unique région de rejet correcte du test sous l'hypothèse nulle : a)]−∞ ; 62,926], b) [62,926 ; +∞[, c)]−∞ ; 62,912] ∪ [63,089 ; +∞[.

Comme $H_1 : m < 63$, le test est unilatéral à gauche : les moyennes observées suffisamment faibles conduisent au rejet de H_0. La proposition a) correspond à cette région.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> Proposition a) : $]-\infty\,;\,62{,}926]$.

Question 3). Énoncer la règle de décision du test d'hypothèse au seuil de 5 %.

La décision dépend de la moyenne $\bar{X}$ des 100 pièces :

- Si $\bar{X} \leq 62,926$ g, on rejette H_0 et on conclut à une baisse significative.
- Si $\bar{X} > 62,926$ g, on ne rejette pas H_0.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Rejeter H_0 si $\bar{X} \leq 62,926$ g ; sinon, ne pas rejeter H_0.

Question 4). Un échantillon de 100 demi-coques supérieures a une masse totale de 6 294 g. Au seuil de 5 %, peut-on considérer que la masse moyenne des demi-coques supérieures a baissé ?

La moyenne observée est $\bar{x} = 6294/100 = 62,94$ g. Elle est supérieure au seuil critique de 62,926 g : elle n'appartient donc pas à la région de rejet du test.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, on ne peut pas conclure à une baisse au seuil de 5 %.

Question 5). Si le test unilatéral avait été réalisé au seuil de 1 %, déterminer quelle aurait été la région de rejet.

Sous H_0, l'écart-type de $\bar{X}$ est 0,045 g. Le quantile normal correspondant à 1 % en queue gauche est environ $-2,3263$. Le seuil vaut donc $63 - 2,3263 \times 0,045 \approx 62,8953$ g.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Région de rejet : $]-\infty\,;\,62,8953]$ g.

Partie 3 : Assemblage des manettes

Question 1). Les demi-coques supérieure et inférieure sont choisies indépendamment. Sachant que leurs taux de non-conformité sont respectivement de 1,3 % et 2 %, démontrer que la probabilité qu'une manette soit défectueuse, c'est-à-dire qu'au moins une demi-coque soit non conforme, est 0,0327 à 10^{-4} près.

Par indépendance, la probabilité que les deux demi-coques soient conformes vaut $(1 - 0,013)(1 - 0,02)$. L'événement « manette défectueuse » est son complémentaire :

$1 - (1 - 0,013)(1 - 0,02) = 0,03274$, soit 0,0327 à 10^{-4} près.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité qu'une manette soit défectueuse est $0,0327$, soit 3,27 %.

Question 2) a). Pour un lot de 50 manettes, Y désigne le nombre de manettes défectueuses. Justifier que Y suit une loi binomiale et en donner les paramètres.

Chaque manette est un essai indépendant, avec deux issues et une probabilité constante $p = 0,0327$ d'être défectueuse. Le nombre de manettes défectueuses parmi 50 suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,0327$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $Y \sim \mathcal{B}(50\,;\,0,0327)$.

Question 2) b). Calculer la probabilité qu'aucune manette du lot de 50 ne soit défectueuse.

Pour n'avoir aucune manette défectueuse, les 50 manettes doivent chacune être conformes. Par indépendance, $P(Y = 0) = (1 - 0,0327)^{50} = 0,9673^{50} \approx 0,1897$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(Y = 0) \approx 0,1897$, soit 18,97 %.

Question 2) c). Calculer P(Y ≥ 2), puis interpréter ce résultat.

On utilise le complémentaire des événements $Y = 0$ et $Y = 1$: $P(Y \geq 2) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1)$. Ainsi, $P(Y \geq 2) = 1 - 0,9673^{50} - 50 \times 0,0327 \times 0,9673^{49} \approx 0,4897$. Cela décrit la proportion théorique de lots contenant au moins deux manettes défectueuses.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(Y \geq 2) \approx 0,4897$, soit environ 48,97 % des lots.

Question 2) d). Calculer l'espérance E(Y) de la variable aléatoire Y et expliquer ce que représente ce nombre dans le cadre d'un grand nombre de lots.

Pour une loi binomiale, $E(Y) = np$. Donc $E(Y) = 50 \times 0,0327 = 1,635$. Sur un grand nombre de lots, le nombre moyen de manettes défectueuses par lot se rapprochera de cette valeur.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(Y) = 1,635$ manette défectueuse par lot en moyenne.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2017)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS groupement C1, session 2017, code MATGRC1, durée deux heures et coefficient 2, sauf Innovation textile (3). Elle étudie la croissance du volume de bois fort d'un Douglas par ajustement statistique et équation différentielle, puis la production et l'assemblage de manettes par lois normale et binomiale et test unilatéral de conformité.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Le coefficient étudié est Q = ln(7/V − 1) ; les points (t, Q) permettent d'ajuster la croissance du volume de bois fort.
- Les solutions de y′ + ay = b s'obtiennent en ajoutant une solution particulière constante b/a aux solutions de l'équation homogène.
- Pour X suivant une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ, Z = (X − μ)/σ permet de calculer une probabilité à partir de la loi normale centrée réduite.
- Pour n essais indépendants de probabilité de défaut p, le nombre de défauts suit une loi binomiale B(n, p), d'espérance np.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les arrondis demandés : au centième pour les valeurs de Q et au millième pour les coefficients de l'ajustement.
- Préciser les axes et reporter soigneusement le nuage de points, l'asymptote et la courbe sur les annexes concernées.
- Pour le test unilatéral, distinguer l'hypothèse nulle, la région de rejet et la règle de décision au seuil indiqué.
- Pour calculer la probabilité qu'une manette soit défectueuse, tenir compte de l'indépendance des demi-coques.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer une probabilité avec la loi normale pour la masse d'une coque ?

Repérez la moyenne μ et l'écart-type σ, puis standardisez le seuil x avec z = (x − μ)/σ. Utilisez la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, puis adaptez le résultat au sens de l'inégalité demandé.

Q : Comment déterminer la région de rejet du test sur la masse moyenne ?

L'hypothèse alternative indique une baisse de la moyenne : le test est donc unilatéral à gauche. La région de rejet se situe dans la queue gauche de la loi sous H0, avec une borne déterminée par le seuil du test.

Q : Comment organiser le temps pour cette épreuve de deux heures ?

Les deux exercices valent respectivement 11 et 9 points. Répartissez le temps selon ces poids, gardez quelques minutes pour vérifier les calculs et les arrondis, et complétez les annexes demandées sans laisser une question difficile bloquer toute l'épreuve.

Q : Les annexes et la qualité de rédaction sont-elles prises en compte ?

Les annexes 1, 2 et 3 sont à compléter et à rendre avec la copie pour les questions indiquées. Le sujet précise également que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements sont prises en compte.

Sujet officiel associé (PDF) : https://bts-cpi.fr/assets/annales/bts-cpi/E2 - Mathématiques/2017/BTS CPI - E2 - Mathématiques - Session 2017 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Conception des Produits Industriels : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.