Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2018 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Variable selon la spécialité : 1, 1,5, 2, 2,5 ou 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Démarrage d'un train à très haute vitesse (13 questions) **Page 3**

2. Obsolescence programmée des smartphones (13 questions) **Page 8**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 12**

Sujet officiel (PDF) : https://bts-cpi.fr/assets/annales/bts-cpi/E2 - Mathématiques/2018/BTS CPI - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

1. Démarrage d’un train à très haute vitesse

Un projet de train à propulsion électromagnétique vise une vitesse instantanée de 400 km/h en moins de deux minutes. La distance parcourue est étudiée par une équation différentielle, des dérivées et le calcul de l’aire d’une pièce destinée à une gare.

A. Résolution d’une équation différentielle

Question 1°. Résoudre sur [0, +∞[l’équation différentielle homogène y' − 0,2y = 0, en utilisant la formule fournie.

On met l’équation sous la forme fournie $y' + ay = 0$. Ici, $a = -0,2$, donc la formule donne $y(t) = ke^{-at} = ke^{0,2t}$. Le réel k est arbitraire. Cette famille contient toutes les solutions sur $[0, +\infty[$, puisque l’équation est homogène du premier ordre et que la formule donnée s’applique sur tout l’intervalle.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\boxed{y(t) = ke^{0,2t},\ k \in \mathbb{R}}$.

Question 2°. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = −15t − 75 est une solution de l’équation différentielle y' − 0,2y = 3t.

1. La dérivée de $g(t) = -15t - 75$ est $g'(t) = -15$.
2. En substituant dans le membre de gauche : $g'(t) - 0,2g(t) = -15 - 0,2(-15t - 75) = 3t$.

On retrouve le membre de droite de l’équation pour tout $t \in [0, 3]$. La fonction g est donc bien une solution particulière de l’équation différentielle considérée.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$g(t) = -15t - 75$ est bien une solution sur $[0, 3]$.

Question 3°. Déduire l’ensemble des solutions de l’équation différentielle y' − 0,2y = 3t.

On a vérifié que $g(t) = -15t - 75$ est une solution particulière. Toute autre solution s’obtient en lui ajoutant une solution de l’équation homogène associée, dont la forme est $ke^{0,2t}$. Le paramètre k peut prendre toute valeur réelle. Cette méthode donne donc l’ensemble complet des solutions de $y' - 0,2y = 3t$ sur l’intervalle considéré.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\boxed{y(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75,\ k \in \mathbb{R}}$.

Question 4°. Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle y' − 0,2y = 3t qui vérifie la condition initiale f(0) = 0.

1. La solution générale est $f(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$.
2. La condition initiale impose $f(0) = k - 75 = 0$, donc $k = 75$.

En remplaçant le paramètre par cette valeur, on obtient l'unique solution de l'équation différentielle qui vérifie la position de départ indiquée dans l'énoncé. Elle s'écrit aussi sous la forme donnée dans la partie B.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\boxed{f(t) = 75e^{0,2t} - 15t - 75 = 75(e^{0,2t} - 1) - 15t}$.

B. Étude de fonction et application

Question 1° a). À partir de l'expression fournie pour f'(t), résoudre sur [0, 3] l'inéquation f'(t) ≥ 0.

Le calcul formel donne $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. Ainsi, $f'(t) \geq 0$ équivaut à $e^{0,2t} \geq 1$. Comme la fonction exponentielle est croissante, cela équivaut à $0,2t \geq 0$, donc à $t \geq 0$. Sur l'intervalle étudié, l'inégalité est vérifiée partout, et l'égalité n'a lieu qu'en $t = 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 3]$, avec $f'(0) = 0$.

Question 1° b). Déduire de l'étude de f'(t) les variations de la fonction f sur [0, 3].

t	0	$]0, 3]$	3
$f'(t)$	0	positif	positif
Variation de f	croissante sur $[0, 3]$		
Valeur	$f(0) = 0$		$f(3) = 75(e^{0,6} - 1) - 45 \approx 16,659$

Le signe de la dérivée montre que f est croissante sur tout l'intervalle, strictement croissante après 0. Elle varie donc de 0 à environ $16,659$ km.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f est croissante sur $[0, 3]$, de $f(0) = 0$ à $f(3) \approx 16,659$ km.

Question 2°. Déterminer le nombre de kilomètres parcourus au bout d'une minute et arrondir le résultat au dixième.

La distance parcourue en une minute est $f(1)$. Avec l'expression de la fonction, on calcule $f(1) = 75(e^{0,2} - 1) - 15 \approx 1,6052$ km. L'arrondi demandé est au dixième : le chiffre des centièmes est inférieur à cinq, donc le chiffre des dixièmes reste inchangé. On exprime la distance dans la même unité que l'énoncé, en kilomètres.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Au bout d'une minute, le wagon a parcouru $\boxed{1,6 \text{ km}}$, au dixième de kilomètre près.

Question 3° a). Déterminer, à partir de f'(t), la vitesse du wagon à t = 2 minutes, en kilomètres par minute, et arrondir au dixième.

1. La vitesse instantanée est $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$, en kilomètres par minute.
2. À $t = 2$, $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1) \approx 7,377$.

En arrondissant au dixième, la vitesse vaut $7,4$ km/min. La dérivée donne bien une vitesse en kilomètres par minute, puisque la distance est exprimée en kilomètres et le temps en minutes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> À deux minutes, la vitesse du wagon est $\boxed{7,4 \text{ km/min}}$, au dixième près.

Question 3° b). Dire si l'objectif des ingénieurs est atteint et justifier la réponse.

À deux minutes, la vitesse vaut environ $7,377$ km/min, soit $7,377 \times 60 \approx 442,6$ km/h. Comme $f'(t) = 15(e^{0,2t} - 1)$ est continue et croissante, la vitesse part de zéro et dépasse 400 km/h à deux minutes. Le seuil de 400 km/h a donc été atteint avant deux minutes, conformément à l'objectif de l'énoncé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **Oui :** le seuil de 400 km/h est atteint avant deux minutes, puisque la vitesse à deux minutes vaut environ $442,6$ km/h.

Question 4°. Choisir parmi les trois propositions l'équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 2. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

La tangente au point d'abscisse 2 a pour pente $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1)$. Son équation est $y = f'(2)(t - 2) + f(2)$, avec $f(2) = 75(e^{0,4} - 1) - 30$. En développant, le coefficient constant devient $45e^{0,4} - 75$. Il faut donc retenir la troisième proposition de l'énoncé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La troisième proposition : $\boxed{y = 15(e^{0,4} - 1)t + 45e^{0,4} - 75}$.

C. Calcul intégral

Question 1°. Choisir, parmi les trois propositions, la valeur de l'aire A1 du rectangle OPQR, en unités d'aire. Le dessin est donné dans un repère orthonormé avec une unité graphique de 1 mètre sur chaque axe.

Dimension	Lecture du schéma
Largeur OP	3 m
Hauteur OR	$2,25$ m
Aire A_1	$3 \times 2,25 = 6,75$ u.a.

Le rectangle s'étend de $x = 0$ à $x = 3$, et du niveau $y = 0$ au niveau supérieur $y = 2,25$. Le produit des deux dimensions correspond à la troisième proposition.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\boxed{A_1 = 6,75 \text{ u.a.}}$, troisième proposition.

Question 2°. À l'aide de la primitive fournie de g(x) = 27x/(2x² + 18), calculer l'aire A2 de la partie limitée par la courbe de g, l'axe des abscisses et les droites x = 0 et x = 3.

Sur $[0, 3]$, $g(x) \geq 0$, donc l'aire cherchée est $\int_0^3 g(x)\,dx$. La primitive fournie est $G(x) = \frac{27}{4}\ln(x^2 + 9) + c_1$. Alors $A_2 = G(3) - G(0) = \frac{27}{4}(\ln 18 - \ln 9) = \frac{27}{4}\ln 2$, soit environ $4,679$ unités d'aire.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$\boxed{A_2 = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679 \text{ u.a.}}.$$

Question 3°. Déduire des questions précédentes l'aire hachurée A, en unités d'aire, et arrondir au millième.

1. Par symétrie, l'aire totale du rectangle supérieur est $2A_1$.
2. Les deux régions sous les courbes ont ensemble une aire $2A_2$.
3. L'aire hachurée est donc $A = 2(A_1 - A_2) = 2\left(6,75 - \frac{27}{4}\ln 2\right)$.

Le calcul donne $A \approx 4,142513$ u.a. L'arrondi au millième est donc $4,143$ u.a.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'aire hachurée est $\boxed{A \approx 4,143 \text{ u.a.}}$, arrondie au millième.

2. Obsolescence programmée des smartphones

L'exercice porte sur les obsolescences technique et logicielle observées sur des smartphones, puis sur la réparabilité d'un lot de modèles A. Il mobilise les probabilités conditionnelles, la loi binomiale et un test bilatéral sur la proportion de personnes estimant que la marque B pratique l'obsolescence programmée.

A. Probabilités conditionnelles

Question 1°. À partir des données de l'énoncé, compléter le tableau d'effectifs pour les 200 smartphones, en distinguant ceux touchés ou non par l'obsolescence technique et ceux touchés ou non par l'obsolescence logicielle.

Smartphones	Touchés par L	Non touchés par L	Total
Touchés par T	2	4	6
Non touchés par T	14	180	194
Total	16	184	200

3 % de 200 donnent 6 smartphones touchés par T. 8 % de 200 en donnent 16 touchés par L, dont 12,5 % sont aussi touchés par T, soit 2. Les autres effectifs se déduisent par différence.

Tableau des effectifs complété

Smartphones	touchés par l'obsolescence logicielle	non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
touchés par l'obsolescence technique	2	4	6
non touchés par l'obsolescence technique	14	180	194
Total	16	184	200

✓ RÉPONSE À RETENIR

Effectifs conjoints : 2, 4, 14 et 180. Totaux : 6, 16, 184 et 194.

Question 2°. Pour un smartphone choisi au hasard, donner P(T), P(L) et P_L(T), où T désigne l'obsolescence technique, L l'obsolescence logicielle et P_L(T) la probabilité de T sachant L.

Les proportions indiquées dans l'énoncé donnent directement **P(T) = 0,03** et **P(L) = 0,08**. Parmi les smartphones touchés par L, 12,5 % sont aussi touchés par T : $\mathbf{P_L(T) = 0,125}$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

P(T) = 0,030 ; P(L) = 0,080 ; $P_L(T)$ = 0,125.

Question 3° a). Calculer la probabilité qu'un smartphone soit touché à la fois par l'obsolescence technique et l'obsolescence logicielle : P(T ∩ L).

Par définition de la probabilité conditionnelle, $P(T \cap L) = P(L) \times P_L(T)$. Donc $0,08 \times 0,125 = 0,010$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

P(T ∩ L) = 0,010.

Question 3° b). Calculer la probabilité qu'un smartphone soit touché par au moins l'un des deux types d'obsolescence : P(T ∪ L).

On retire l'intersection après avoir additionné les deux probabilités, car elle est comptée deux fois : $P(T \cup L) = P(T) + P(L) - P(T \cap L) = 0,03 + 0,08 - 0,01 = 0,10$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

P(T ∪ L) = 0,100.

Question 3° c). Calculer P_T(L), la probabilité d'obsolescence logicielle sachant que le smartphone est touché par l'obsolescence technique.

La probabilité recherchée est $P_T(L) = P(T \cap L) / P(T)$. Ainsi, $0,01 / 0,03 = 1/3 \approx 0,333$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P_T(L)$ = 0,333.

B. Loi binomiale

Question 1°. Justifier que X, le nombre de smartphones non réparables dans un lot de 50, suit une loi binomiale, puis déterminer ses paramètres.

Chaque tirage a deux issues, avec une probabilité constante de 0,045 d'obtenir un smartphone non réparable. Les tirages sont assimilés à des tirages avec remise, donc indépendants. Le nombre X de smartphones non réparables parmi 50 suit une loi binomiale de paramètres n = 50 et p = 0,045.

✓ RÉPONSE À RETENIR

X suit la loi binomiale de paramètres n = 50 et p = 0,045.

Question 2°. Calculer la probabilité que tous les smartphones d'un lot de 50 soient réparables.

La probabilité qu'un smartphone soit réparable est $1 - 0{,}045 = 0{,}955$. Par indépendance, la probabilité que les 50 soient réparables vaut $0{,}955^{50} \approx 0{,}100$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Probabilité que les 50 smartphones soient réparables : 0,100.

Question 3° a). Exécuter à la main l'algorithme fourni et compléter le tableau avec les valeurs de P(X = i) et les valeurs successives de S pour i allant de 0 à 3.

i	0	1	2	3
P(X = i)	0,100	0,236	0,272	0,205
S après ajout	0,100	0,336	0,608	0,813

À chaque étape, l'algorithme ajoute à S la probabilité correspondante. Les valeurs du tableau sont arrondies au millième.

Tableau de l'algorithme complété

i	0	1	2	3
$P(X = i)$	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

✓ RÉPONSE À RETENIR

P(X = i), pour i = 0 à 3 : 0,100 ; 0,236 ; 0,272 ; 0,205. S successifs : 0,100 ; 0,336 ; 0,608 ; 0,813.

Question 3° b). Donner la valeur de S à la fin de l'algorithme et interpréter le résultat.

La somme finale regroupe les probabilités pour 0, 1, 2 ou 3 smartphones non réparables. Elle correspond donc à la probabilité qu'un lot contienne au plus trois smartphones non réparables.

✓ RÉPONSE À RETENIR

S ≈ 0,813 : environ 81,3 % des lots comptent au plus trois smartphones non réparables.

Question 4°. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

Pour une loi binomiale, $E(X) = np$. Donc $E(X) = 50 \times 0{,}045 = 2{,}25$. En moyenne, un lot de 50 smartphones contient 2,25 appareils non réparables.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> E(X) = 2,25 smartphones non réparables par lot en moyenne.

C. Test d'hypothèse

Question 1°. Sous l'hypothèse nulle, choisir la valeur de h, arrondie au centième, telle que P(0,55 − h ≤ F ≤ 0,55 + h) = 0,95. Trois valeurs sont proposées.

L'intervalle central de 95 % d'une loi normale s'étend sur environ 1,96 écarts types de part et d'autre de la moyenne. Ainsi, $h \approx 1{,}96 \times 0{,}037 = 0{,}07252$, soit 0,07 au centième. La réponse proposée est 0,07.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> h ≈ 0,07.

Question 2°. Énoncer la règle de décision du test bilatéral de H0 : p = 0,55, au seuil de signification de 5 %.

On ne rejette pas H_0 si la fréquence observée appartient à l'intervalle central autour de 0,55. Avec h arrondi à 0,07, cet intervalle est [0,48 ; 0,62]. En dehors, on rejette H_0 au seuil de 5 %.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Ne pas rejeter H_0 si la fréquence est entre 0,48 et 0,62 ; la rejeter sinon.

Question 3°. Pour l'échantillon de 180 personnes dont 76 estiment que la marque B pratique l'obsolescence programmée, donner la conclusion du test.

La fréquence observée vaut $76/180 \approx 0{,}422$. Elle est inférieure à la borne basse 0,48 de l'intervalle de décision : on rejette H_0 au seuil de 5 %. La fréquence observée est plus faible que 0,55.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> 0,422 < 0,48 : rejet de H_0. La fréquence observée est significativement inférieure à 0,55.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, session 2018, code MATGRB1, d'une durée de deux heures. Le coefficient varie selon la spécialité. Les deux exercices, notés chacun sur 10 points, portent sur le démarrage d'un train à très haute vitesse et l'obsolescence programmée des smartphones. Les compétences évaluées incluent équations différentielles, étude de fonction, intégration, probabilités conditionnelles, loi binomiale et test d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' − 0,2y = 3t, la solution générale est la somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène.
- Quand f(t) représente une distance en fonction du temps, f'(t) représente la vitesse instantanée.
- Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance vaut np et P(X = k) = C(n,k)p^k(1 − p)^(n − k).
- Dans un test bilatéral à 5 %, la fréquence observée se compare aux bornes de l'intervalle de décision défini sous H0.

Points de vigilance & attentes du jury

- Convertir les kilomètres par minute en kilomètres par heure avant de comparer la vitesse à 400 km/h.
- Pour l'aire, repérer les bornes d'intégration, la primitive utile et la symétrie indiquée par le dessin.
- Distinguer P(T sachant L) de P(L sachant T) et utiliser le bon événement conditionnant.
- Pour le test, comparer la fréquence observée à l'intervalle de décision puis conclure dans le contexte.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment exploiter la dérivée pour vérifier l'objectif de vitesse du train ?

La dérivée de la distance par rapport au temps donne la vitesse en kilomètres par minute. Calculez f'(2), convertissez en kilomètres par heure en multipliant par 60, puis comparez à l'objectif de 400 km/h.

Q : Comment reconnaître une loi binomiale dans la partie sur les smartphones ?

Il faut un nombre fixe de tirages, deux issues possibles, une probabilité de succès constante et des tirages indépendants. L'énoncé assimile le prélèvement à des tirages avec remise, ce qui justifie l'indépendance.

Q : Comment organiser le temps sur cette épreuve de deux heures ?

Les deux exercices valent chacun dix points et leurs parties sont indépendantes. Répartissez le temps selon la difficulté, puis gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités, les arrondis et les réponses à choix multiples.

Q : Que faut-il écrire pour conclure un test d'hypothèse ?

Appliquez la règle de décision au seuil indiqué en situant la fréquence observée par rapport à l'intervalle de décision. Concluez dans le contexte si les données conduisent à rejeter H0, sans prétendre prouver définitivement sa vérité.

Sujet officiel associé (PDF) : https://bts-cpi.fr/assets/annales/bts-cpi/E2 - Mathématiques/2018/BTS CPI - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Conception des Produits Industriels : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.