Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Freinage d'un chariot de fête foraine** (12 questions) — **Page 3**
2. **Contrôle de conformité et durée de vie de produits industriels** (9 questions) — **Page 7**
3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://bts-cpi.fr/assets/annales/bts-cpi/E2 - Mathématiques/2022/BTS CPI - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m/s est freiné et sa vitesse f(t), exprimée en m/s, est modélisée au cours du temps. Les trois parties étudient une équation différentielle, les variations et l'intégrale de la vitesse, puis le développement limité et la tangente à la courbe.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène (E₀) : y' + 0,8y = 0.

Le sujet fournit la forme générale des solutions de l'équation homogène $y' + ay = 0$: $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, $a = 0{,}8$. Il suffit donc de remplacer a par cette valeur dans la forme générale. Cette expression est définie et dérivable sur l'intervalle demandé $[0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sur $[0; +\infty[$, les solutions sont $y(t) = ke^{-0{,}8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. La fonction g est définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction $g(t) = 5$ est constante, donc sa dérivée est nulle : $g'(t) = 0$. En remplaçant y par g dans le membre de gauche de l'équation, on obtient $g'(t) + 0{,}8g(t) = 0 + 0{,}8 \times 5 = 4$. L'égalité avec le membre de droite est vérifiée pour tout $t \in [0; +\infty[$, ce qui prouve que g est une solution.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour tout $t \geq 0$, $g'(t) + 0{,}8g(t) = 4$: $g(t) = 5$ est solution de (E).

Question 1.c. Déduire de la question précédente l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction $g(t) = 5$ est une solution particulière de (E). Si y est une autre solution, la différence $y - g$ vérifie l'équation homogène (E_0). D'après la question 1.a, cette différence s'écrit $ke^{-0{,}8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$. On obtient donc toutes les solutions en ajoutant cette solution homogène à la solution particulière constante.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'ensemble des solutions de (E) est $y(t) = 5 + ke^{-0{,}8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale de (E) est $f(t) = 5 + ke^{-0{,}8t}$. À l'instant initial $t = 0$, on a $e^0 = 1$, donc la condition $f(0) = 20$ donne $5 + k = 20$. Ainsi, $k = 20 - 5 = 15$. En remplaçant la constante dans la solution générale, on détermine la fonction vitesse recherchée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La solution vérifiant $f(0) = 20$ est $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Pour f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Quand t tend vers $+\infty$, le produit $-0,8t$ tend vers $-\infty$. L'exponentielle $e^{-0,8t}$ tend donc vers 0, et par multiplication par 15, le terme $15e^{-0,8t}$ tend également vers 0. Dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le seul terme qui subsiste à la limite est la constante 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La limite de $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$ lorsque $t \to +\infty$ est 5.

Question 1.b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote, puis en donner une équation.

La limite de $f(t)$ lorsque $t \to +\infty$ est finie et égale à 5. La courbe représentative C se rapproche donc, pour les grandes valeurs de t, de la droite horizontale d'ordonnée 5. Par définition, cette droite est une asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe C admet en $+\infty$ l'asymptote horizontale d'équation $y = 5$.

Question 2. En utilisant f'(t) = -12e^(-0,8t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc la dérivée donnée $f'(t) = -12e^{-0,8t}$ est strictement négative. La fonction est ainsi strictement décroissante. De plus, $f(0) = 15 + 5 = 20$ et $f(t) \to 5$ lorsque $t \to +\infty$. Le tableau indique le signe de la dérivée et les variations de f.

t	0	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	$-$
Variation de f	20	5

✓ RÉPONSE À RETENIR

Sur $[0; +\infty[$, f décroît strictement de 20 vers 5.

Question 3. **Le système de freinage permet-il au chariot de s'arrêter ?**

Pour tout instant fini $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0{,}8t}$ est strictement positive. Ainsi, $f(t) = 15e^{-0{,}8t} + 5 > 5$, donc la vitesse ne s'annule jamais. Elle décroît et se rapproche de 5 m/s lorsque le temps augmente, mais n'atteint pas zéro selon le modèle étudié. Le système de freinage ne permet donc pas au chariot de s'arrêter.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : le modèle donne une vitesse toujours supérieure à $5\ \mathrm{m/s}$, qui tend vers $5\ \mathrm{m/s}$.

Question 4.a. **La fonction F est définie sur [0 ; +∞[par F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur cet intervalle.**

On dérive $F(t) = -18{,}75e^{-0{,}8t} + 5t$. En appliquant la règle de dérivation de l'exponentielle, $(e^{-0{,}8t})' = -0{,}8e^{-0{,}8t}$. Ainsi, $F'(t) = -18{,}75 \times (-0{,}8)e^{-0{,}8t} + 5 = 15e^{-0{,}8t} + 5$. Cette dérivée est exactement la fonction $f(t)$, donc F en est une primitive sur l'intervalle demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Comme $F'(t) = 15e^{-0{,}8t} + 5 = f(t)$, F est une primitive de f.

Question 4.b. **La distance d parcourue entre les instants t_0 et t_1 est donnée par l'intégrale de f entre ces instants. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance parcourue entre 0 et 1 seconde est $d = F(1) - F(0)$. En utilisant la primitive donnée, $F(1) - F(0) = (-18{,}75e^{-0{,}8} + 5) - (-18{,}75) = 23{,}75 - 18{,}75e^{-0{,}8}$. La valeur exacte est en mètres. Son évaluation est d'environ $15{,}3251$ m ; l'arrondi au centimètre est donc $15{,}33$ m.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La distance exacte est $23{,}75 - 18{,}75e^{-0{,}8}\ \mathrm{m}$, soit $15{,}33\ \mathrm{m}$ au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Question à choix multiples : recopier l'unique proposition donnant le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée.**

Le document indique que la partie polynomiale du développement limité est $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Parmi les trois réponses proposées, seule la troisième conserve ces trois termes et ajoute un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. C'est la forme requise pour un développement limité à l'ordre 2.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Il faut recopier la troisième proposition : $20 - 12t + 4{,}8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)(t - 0)$. La condition initiale fournit $f(0) = 20$. D'après l'expression de la dérivée donnée, $f'(0) = -12e^0 = -12$. En remplaçant ces valeurs dans la formule de la tangente, on obtient une droite passant par le point $(0; 20)$ et de coefficient directeur -12.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

La tangente à C au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 20 - 12t$.

2. Contrôle de conformité et durée de vie de produits industriels

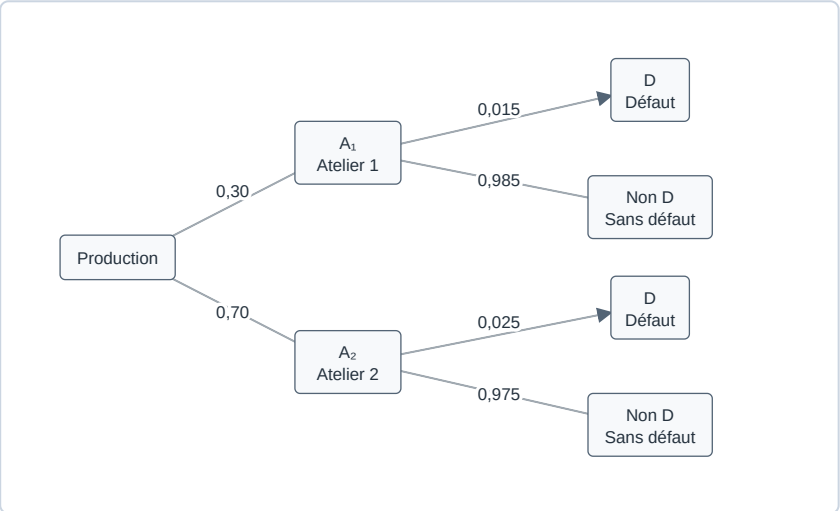
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers, avec des proportions de production et des taux de défaut différents, puis modélise leur durée de bon fonctionnement par une loi exponentielle. La dernière partie étudie la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon de 1 000 pièces et construit un intervalle de confiance à 95 %.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation de production des tubes dans les deux ateliers, leurs proportions de production et les probabilités de défaut.

La première bifurcation représente la répartition de la production entre les deux ateliers. À partir de chaque atelier, les branches indiquent les probabilités conditionnelles de défaut et d'absence de défaut. Dans chaque cas, la somme des probabilités des deux branches vaut 1. L'arbre ci-dessous reprend les proportions et les taux indiqués dans l'énoncé.

Arbre pondéré de production des tubes



Les probabilités des branches issues de chaque atelier sont conditionnelles à cet atelier.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arbre pondéré : ateliers, puis défaut ou absence de défaut.

Question 2. Calculer la probabilité P(A₁ ∩ D), où A₁ désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

L'événement demandé correspond au chemin où le tube provient de l'atelier 1 et présente un défaut. La probabilité de ce chemin est le produit de la probabilité d'être issu de l'atelier 1 par celle d'avoir un défaut dans cet atelier : $P(A_1 \cap D) = P(A_1)P(D \mid A_1) = 0{,}30 \times 0{,}015 = 0{,}0045$. Rapporté à toute la production, cela représente 0,45 % des tubes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0{,}0045$.

Question 3. Montrer que la probabilité qu'un tube choisi au hasard présente un défaut est P(D) = 0,022.

Les événements A_1 et A_2 forment une partition de la production. On applique donc la formule des probabilités totales : $P(D) = P(A_1)P(D \mid A_1) + P(A_2)P(D \mid A_2)$. En utilisant les proportions des deux ateliers et leurs taux de défaut, on obtient $0{,}30 \times 0{,}015 + 0{,}70 \times 0{,}025 = 0{,}0045 + 0{,}0175 = 0{,}022$. Le résultat est bien celui demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0{,}022$, soit 2,2 %.

Question 4. Sachant que le tube choisi ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.

Parmi les tubes sans défaut, la probabilité de provenir de l'atelier 2 vaut $P(A_2 \cap \overline{D}) = 0{,}70 \times (1 - 0{,}025) = 0{,}6825$. La probabilité qu'un tube soit sans défaut est $1 - P(D) = 1 - 0{,}022 = 0{,}978$. Ainsi, $P(A_2 \mid \overline{D}) = \frac{0{,}6825}{0{,}978} \approx 0{,}6979$. On obtient la part issue de l'atelier 2 parmi les tubes conformes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0{,}698$, soit 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. La durée de bon fonctionnement T suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance est donnée par $E(T) = \frac{1}{\lambda}$. Avec le paramètre de l'énoncé, $E(T) = \frac{1}{0{,}001} = 1\,000$ heures. Dans ce modèle, un tube a donc une durée moyenne de bon fonctionnement de 1 000 heures. Il s'agit d'une moyenne sur l'ensemble des durées, et non d'une durée garantie pour chaque tube.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 1\,000$ heures.

Question 2. Calculer, en arrondissant au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube choisi au hasard soit inférieure à 8 000 heures.

Pour une loi exponentielle, la probabilité d'une durée inférieure ou égale à t est $1 - e^{-\lambda t}$. La loi étant continue, les événements $T < 8\,000$ et $T \leq 8\,000$ ont la même probabilité. On calcule $1 - e^{-0{,}001 \times 8\,000} = 1 - e^{-8} \approx 0{,}9996645$. L'arrondi au centième demandé donne donc 1,00.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T < 8\,000) \approx 1{,}00$.

Question 3. Calculer, en arrondissant au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube choisi au hasard soit supérieure à 10 000 heures.

La probabilité de dépasser t heures sous une loi exponentielle est $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Pour 10 000 heures, $P(T > 10\,000) = e^{-0{,}001 \times 10\,000} = e^{-10} \approx 0{,}0000454$. Cette valeur est positive mais très faible. Arrondie au centième, comme le demande l'énoncé, elle s'écrit 0,00.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T > 10\,000) \approx 0{,}00$.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Parmi les 1 000 rivets prélevés, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes dans la production.

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue p est la fréquence observée dans l'échantillon. Parmi les 1 000 rivets prélevés, 975 sont conformes. Ainsi, $\hat{p} = f = \frac{975}{1\,000} = 0{,}975$. Cette estimation correspond à 97,5 % de rivets conformes dans l'échantillon et sert d'estimation de la proportion dans toute la production.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\hat{p} = 0{,}975$, soit 97,5 %.

Question 2. À l'aide de la formule fournie pour un intervalle de confiance d'une proportion au niveau de confiance de 95 %, déterminer l'intervalle centré sur la fréquence observée f pour p. Arrondir les bornes à 10^{-3} près.

La fréquence observée est $f = 0{,}975$, pour un échantillon de taille $n = 1\,000$. Selon la formule fournie, l'intervalle est $[f - 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\ ;\ f + 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}]$. La marge calculée vaut environ 0,009677. Les bornes non arrondies sont donc 0,965323 et 0,984677 ; arrondies au millième, elles donnent l'intervalle demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0{,}965\ ;\ 0{,}985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, porte le code 22MATGRB1 et dure 2 heures. Le coefficient est 2, sauf en Traitement des matériaux où il est 3. Elle étudie le freinage d'un chariot, les défauts et la durée de vie de tubes fluorescents, puis l'estimation statistique de la conformité de rivets.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de y' + ay = 0 sont de la forme y(t) = ke^(-at).
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, E(T) = 1/λ, P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt) et P(T > t) = e^(-λt).
- Si f(t) = 5 + 15e^(-0,8t), alors sa limite en +∞ vaut 5 et l'asymptote horizontale est y = 5.
- L'estimation ponctuelle d'une proportion est la fréquence observée; l'intervalle fourni est f ± 1,96√(f(1-f)/n).

Points de vigilance & attentes du jury

- Dans l'arbre pondéré, distinguer les probabilités des ateliers des probabilités conditionnelles de défaut.
- La probabilité totale de défaut est 0,3 × 0,015 + 0,7 × 0,025 = 0,022.
- Pour la distance parcourue, calculer $F(t_1) - F(t_0)$, puis exprimer le résultat en mètres et respecter l'arrondi demandé.
- Pour l'intervalle de confiance, utiliser f = 0,975 et n = 1 000, puis arrondir les bornes au millième.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer la distance parcourue par le chariot entre deux instants ?

La distance est l'intégrale de la vitesse sur l'intervalle considéré. Utilisez la primitive F, calculez $F(t_1) - F(t_0)$, puis exprimez le résultat en mètres et appliquez l'arrondi demandé.

Q : Comment calculer une probabilité avec la loi exponentielle de l'épreuve ?

Pour une durée T de paramètre λ, utilisez P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt). Pour une durée supérieure à t, utilisez P(T > t) = e^(-λt). Vérifiez que le temps et le paramètre sont exprimés dans des unités cohérentes.

Q : Comment organiser les deux heures et répartir le temps entre les exercices ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et leurs parties sont indépendantes. Répartissez le temps entre les questions, avancez si une difficulté vous bloque, puis gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités et les arrondis.

Q : Quelles exigences de notation faut-il respecter dans les réponses ?

Présentez les étapes de calcul nécessaires, identifiez clairement les événements et interprétez les résultats lorsque cela est demandé. Respectez les arrondis indiqués et, pour le QCM, recopiez une seule proposition sans justification.

Sujet officiel associé (PDF) : https://bts-cpi.fr/assets/annales/bts-cpi/E2 - Mathématiques/2022/BTS CPI - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Conception des Produits Industriels : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.