Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Freinage d'un chariot de fête foraine** (12 questions) — **Page 3**
2. **Transformées de Laplace et réponse d'un système électrique** (9 questions) — **Page 7**
3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://bts-cpi.fr/assets/annales/bts-cpi/E2 - Mathématiques/2022/BTS CPI - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m/s est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction f du temps. Les trois parties portent sur une équation différentielle, l'étude de la vitesse et de la distance parcourue, puis le développement limité et la tangente à la courbe.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre sur l'intervalle considéré l'équation différentielle homogène (E_0) : y' + 0,8y = 0.

L'équation homogène est de la forme $y' + ay = 0$, avec $a = 0,8$. La formule du sujet donne toutes ses solutions : $y(t) = ke^{-0,8t}$, où k est une constante réelle. En effet, la dérivée de cette expression est $-0,8ke^{-0,8t}$, donc $y'(t) + 0,8y(t) = 0$. Ces fonctions sont définies et dérivables sur l'intervalle demandé, $[0; +\infty[$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$.

Question 1.b. Pour la fonction g définie par g(t) = 5, vérifier que g est solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction g est constante, donc $g'(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$. En substituant $g(t) = 5$ dans le membre de gauche de l'équation (E), on obtient :

$$g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4.$$

Le membre de gauche est donc égal au membre de droite pour chaque valeur de t. Cela vérifie que g est bien une solution particulière de (E).

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution particulière de (E), car $g'(t) + 0,8g(t) = 4$.

Question 1.c. Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

On sait que $g(t) = 5$ est une solution particulière de (E). Pour obtenir toutes les solutions, on lui ajoute les solutions de l'équation homogène associée (E_0). En utilisant le résultat de la question 1.a, on obtient :

1. solution particulière : 5 ;
2. solution homogène : $ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$;
3. solution générale : leur somme.

Réciproquement, cette somme vérifie bien l'équation différentielle.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale est $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. On impose la condition initiale à l'instant $t = 0$, en utilisant $e^0 = 1$:

$f(0) = 5 + k = 20$, donc $k = 20 - 5 = 15$.

En remplaçant la constante par cette valeur dans la solution générale, on obtient la fonction correspondant à la vitesse initiale du chariot. La substitution en $t = 0$ redonne bien la valeur imposée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, pour tout $t \geq 0$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

La fonction est donnée par $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Quand t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t}$ tend vers 0. Par multiplication par 15, le terme exponentiel tend encore vers 0. Par addition de la constante 5, la limite de $f(t)$ vaut donc 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$ m/s.

Question 1.b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote, puis en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est le nombre fini 5. Or, lorsqu'une fonction tend vers une valeur finie à l'infini, sa courbe représentative admet une asymptote horizontale dont l'ordonnée est cette limite. Ici, la courbe s'en approche par valeurs supérieures, puisque $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$ pour tout $t \geq 0$.

- Nature : asymptote horizontale en $+\infty$.
- Équation : $y = 5$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> En $+\infty$, l'asymptote horizontale de C a pour équation $y = 5$.

Question 2. À partir de l'expression donnée de f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est ainsi strictement décroissante. Elle part de $f(0) = 20$ et tend vers 5 lorsque t tend vers $+\infty$.

t	**0**		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	20	$\searrow$	5

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Un arrêt nécessiterait que la vitesse devienne nulle à un instant fini. Or, pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. La vitesse est donc toujours supérieure à 5 m/s et décroît vers cette limite sans l'atteindre.

- La vitesse ne s'annule jamais.
- Le système de freinage modélisé ne permet donc pas l'arrêt du chariot.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse reste supérieure à 5 m/s et ne devient jamais nulle.

Question 4.a. Vérifier que F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$ à l'aide de la règle de dérivation de l'exponentielle :

$$F'(t) = -18,75 \times (-0,8)e^{-0,8t} + 5.$$

Comme $18,75 \times 0,8 = 15$, on obtient $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette expression est exactement celle de $f(t)$. La dérivée de F étant f, la fonction proposée est bien une primitive de f sur l'intervalle considéré.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$, donc F est une primitive de f.

Question 4.b. En utilisant la relation entre la distance parcourue et l'intégrale de la vitesse, calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance parcourue est l'intégrale de la vitesse entre les deux instants. Avec la primitive F, le calcul se fait ainsi :

1. $d = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = F(1) - F(0)$;
2. $F(1) = -18,75e^{-0,8} + 5$ et $F(0) = -18,75$;
3. $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8} \approx 15,3251$ m.

Au centimètre près, on arrondit la valeur décimale à deux chiffres après la virgule.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m, soit $15,33$ m au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. Choisir, parmi les propositions, le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Recopier une seule réponse ; aucune justification n'est demandée et une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni n'enlève de point.

Le logiciel donne la partie régulière $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$, soit $20 - 12t + 4,8t^2$. Pour un développement limité à l'ordre 2, le reste doit être de la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ quand $t \to 0$. La proposition correcte est donc celle qui reprend ce polynôme et ce reste.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 s'écrit $y = f(0) + f'(0)(t - 0)$. D'après l'expression de la vitesse, $f(0) = 20$. La dérivée fournie donne $f'(0) = -12e^0 = -12$. La tangente passe donc par le point $(0; 20)$ et son coefficient directeur est -12. En remplaçant ces deux valeurs dans la formule, on obtient son équation.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Transformées de Laplace et réponse d'un système électrique

Un système électrique causal reçoit le signal e(t) = 2U(t) - U(t - 1) et produit le signal de sortie s(t), avec une fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1). L'exercice demande de représenter le signal d'entrée, d'utiliser les transformées de Laplace pour déterminer la sortie, puis d'étudier son expression et son comportement.

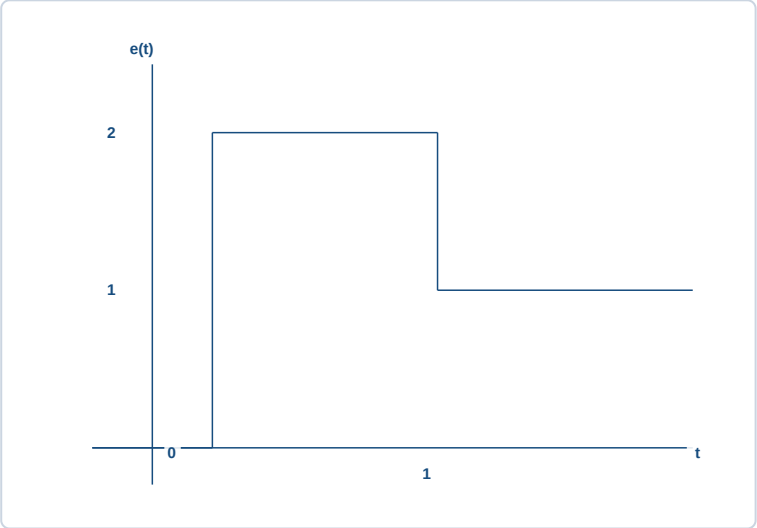
Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Tracer sur le document-réponse à rendre avec la copie la courbe représentative de la fonction d'entrée e(t).

1. Pour $t < 0$, la causalité donne $e(t) = 0$.
2. Pour $0 \leq t < 1$, $U(t) = 1$ et $U(t-1) = 0$, donc $e(t) = 2$.
3. Pour $t \geq 1$, les deux échelons valent 1, donc $e(t) = 1$.

Le signal présente un saut en $t = 0$, puis une baisse en $t = 1$.

Signal d'entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

$e(t) = 0$ si $t < 0$, 2 si $0 \leq t < 1$, et 1 si $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée e(t).

La transformée de $U(t)$ est $1/p$, et celle de $U(t-1)$ est e^{-p}/p, selon le formulaire. Par linéarité, on transforme séparément les deux termes de $e(t) = 2U(t) - U(t-1)$:

$$E(p) = \frac{2}{p} - \frac{e^{-p}}{p} = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. En utilisant S(p) = H(p) × E(p), démontrer l'expression S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/(p(p + 1))]e^(-p).

1. La relation entrée-sortie donne $S(p) = H(p)E(p)$.
2. En remplaçant $H(p) = 1/(p+1)$ et $E(p) = (2 - e^{-p})/p$, on obtient $S(p) = (2 - e^{-p})/[p(p+1)]$.
3. La séparation des deux termes donne l'expression demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier l'égalité 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

Mettons au même dénominateur les deux fractions du membre de droite :

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{p+1-p}{p(p+1)} = \frac{1}{p(p+1)}.$$

L'égalité est donc vérifiée pour les valeurs de p où les expressions sont définies.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de e^(-p)/p et de e^(-p)/(p + 1), en utilisant le formulaire si nécessaire.

On utilise les transformées usuelles et le décalage temporel : la multiplication par e^{-p} correspond au retard d'une unité.

Transformée	Transformée inverse
$1/p$	$U(t)$
$1/(p+1)$	$e^{-t}U(t)$
e^{-p}/p	$U(t-1)$
$e^{-p}/(p+1)$	$e^{-(t-1)}U(t-1)$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. **Déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.**

En utilisant la décomposition de $S(p)$, on a $S(p) = 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) - e^{-p}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)$. Pour $0 \leq t < 1$, les termes retardés sont nuls puisque $U(t-1) = 0$. L'inverse des premiers termes donne donc $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. **En utilisant l'expression admise de s(t) sur [1 ; +∞[, calculer s(1), d'abord sous forme exacte puis avec une valeur approchée au dixième.**

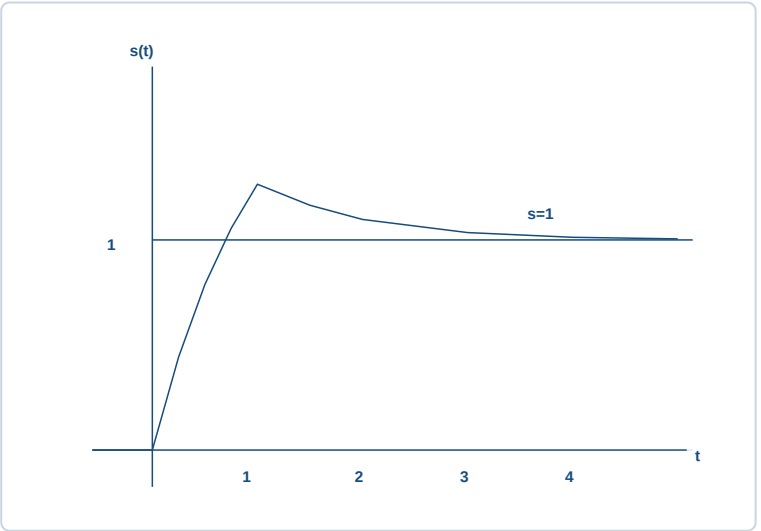
1. Dans l'expression valable pour $t \geq 1$, remplaçons t par 1 : $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1$.
2. On simplifie : $s(1) = 2 - 2/e$.
3. Comme $2 - 2/e \approx 1{,}264$, l'arrondi au dixième est $1{,}3$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1{,}3$.

Question 5.b. **Compléter sur le document-réponse à rendre avec la copie la courbe représentative de la fonction s.**

La sortie est nulle pour $t < 0$. Sur $[0;1[$, elle suit $s(t) = 2(1 - e^{-t})$, puis, pour $t \geq 1$, $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. Les deux expressions coïncident en $t = 1$: la courbe atteint alors $2 - 2/e$, puis décroît vers l'asymptote horizontale $s = 1$.

Courbe du signal de sortie s(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe nulle avant 0, croissante jusqu'à $s(1) = 2 - 2/e$, puis décroissante vers $s = 1$.

Question 5.c. Donner la limite de s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. Le terme $(e-2)e^{-t}$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. La sortie se rapproche donc de 1 :

- $\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, code 22MATGRB2, dure deux heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Ses deux exercices de dix points étudient le freinage d'un chariot et la réponse d'un système électrique, en mobilisant équations différentielles, analyse de fonction, intégration, développement limité et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de y' + ay = 0 sont de la forme y(t) = ke^(-at) ; on ajoute une solution particulière pour résoudre l'équation avec second membre.
- Pour f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, la limite en +∞ vaut 5 et l'asymptote horizontale est y = 5.
- La distance parcourue entre t_0 et t_1 est d = ∫[t_0,t_1] f(t)dt ; on l'évalue avec une primitive de la vitesse.
- La transformée de Laplace de U(t - a) est e^(-ap)/p ; un décalage temporel d'une unité introduit un facteur e^(-p).

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer les unités : vitesse en m/s, temps en secondes et distance en mètres.
- Pour décider si le chariot s'arrête, examiner la limite de sa vitesse et vérifier si elle est nulle.
- Au développement limité d'ordre 2, le reste s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, avec ε(t) qui tend vers zéro.
- Pour s(t), respecter les intervalles [0 ; 1[et [1 ; +∞[et vérifier la valeur au raccord t = 1.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la solution particulière de l'équation différentielle du freinage ?

Pour y' + 0,8y = 4, on peut tester une fonction constante g(t) = 5. Sa dérivée est nulle et 0,8 × 5 = 4. Les solutions générales s'obtiennent en ajoutant à cette solution particulière les solutions de l'équation homogène.

Q : Comment trouver l'asymptote horizontale de la vitesse ?

On calcule la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞. Le terme exponentiel e^(-0,8t) tend vers zéro, donc f(t) tend vers 5. La courbe admet ainsi l'asymptote horizontale d'équation y = 5.

Q : Comment organiser les questions de transformées de Laplace ?

Déterminez d'abord E(p), puis calculez S(p) avec S(p) = H(p)E(p). Décomposez les fractions, appliquez les transformées inverses du formulaire et traitez le facteur e^(-p) comme un décalage temporel d'une unité.

Q : Une réponse fausse à la question à choix multiples est-elle pénalisée ?

Pour le développement limité de l'exercice 1, le sujet précise qu'une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni n'enlève de point. Une seule réponse est attendue et aucune justification n'est demandée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://bts-cpi.fr/assets/annales/bts-cpi/E2 - Mathématiques/2022/BTS CPI - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Conception des Produits Industriels : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.