Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques, Groupement B des BTS

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf Traitement des matériaux (2 options) : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction** (14 questions) — **Page 3**
2. **Probabilités et estimation dans un magasin de vélos** (10 questions) — **Page 9**
3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 13**

Sujet officiel (PDF) : https://bts-cpi.fr/assets/annales/bts-cpi/E2 - Mathématiques/2023/BTS CPI - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le point M, situé au fond d'un tiroir, et le point O, fixé au meuble, est modélisée en fonction du temps. L'exercice étudie cette distance par une équation différentielle, puis analyse la fonction obtenue, un algorithme de seuil et son développement limité.

Partie A : résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On factorise le polynôme : $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$. L'équation devient $(r + 1)(r + 4) = 0$. Comme un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul, les deux racines sont -1 et -4.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1. b. Résoudre l'équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0 en utilisant le tableau fourni.

Les racines de l'équation caractéristique sont réelles et distinctes. D'après le tableau fourni, la solution générale de l'équation différentielle est donc une combinaison des exponentielles associées à ces racines.

1. À la racine -1 correspond e^{-t}.
2. À la racine -4 correspond e^{-4t}.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2. a. À partir de la position initiale du point M et de sa vitesse initiale, déterminer f(0) et f'(0).

La distance initiale entre O et M est de 20 cm. La vitesse initiale de rapprochement est donnée avec son signe : elle vaut $-10\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$. Comme la dérivée de la distance est la vitesse, ces deux données donnent directement la valeur de la fonction et de sa dérivée à l'instant initial.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $f(0) = 20\ \mathrm{cm}$ et $f'(0) = -10\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$.

Question 2. b. En utilisant l'expression de f(t) fournie, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

On remplace t par 2 dans l'expression donnée : $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$. Cette forme exacte est la distance cherchée, en centimètres. Pour contrôle, sa valeur approchée est $3,157$ cm.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$OM = f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2. c. Le tiroir est considéré fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, et justifier.

La fonction est décroissante et le seuil de fermeture est de 0,5 cm. On évalue la distance à 4 secondes :

- $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0,427$ cm ;
- cette valeur est strictement inférieure à 0,5 cm.

Le seuil a donc été atteint avant 4 secondes : l'affirmation du constructeur est vraie.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui : $f(4) \approx 0,427 \text{ cm} < 0,5 \text{ cm}$, donc le tiroir est fermé en moins de 4 secondes.

Partie B : étude de fonction

Question 1. a. En utilisant la limite rappelée pour e^{-u}, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers plus l'infini.

La fonction est la somme de deux termes proportionnels à e^{-t} et e^{-4t}. Lorsque t tend vers $+\infty$, les deux exponentielles tendent vers zéro. Leurs coefficients étant constants, chacun des termes tend vers zéro, et leur somme aussi.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0.$

Question 1. b. Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote, puis en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est nulle. Une fonction qui tend vers une limite finie L possède une asymptote horizontale d'équation $y = L$ en cet infini. Ici, cette droite est l'axe des abscisses.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale en $+\infty$: $y = 0$.

Question 2. a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à l'intervalle [0 ; +∞[.

On dérive chaque exponentielle en appliquant $(e^{u(t)})' = u'(t)e^{u(t)}$. Ainsi, le terme en e^{-t} donne $-\frac{70}{3}e^{-t}$. Pour le second, la dérivée de $-4t$ vaut -4, ce qui donne le terme positif $\frac{40}{3}e^{-4t}$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$, pour tout $t \geq 0$.

Question 2. b. Sachant que f'(t) est négative sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.

La dérivée étant négative sur l'intervalle donné, f y est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et $f(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

t	**0**	$+\infty$
$f(t)$	20	$\searrow 0$

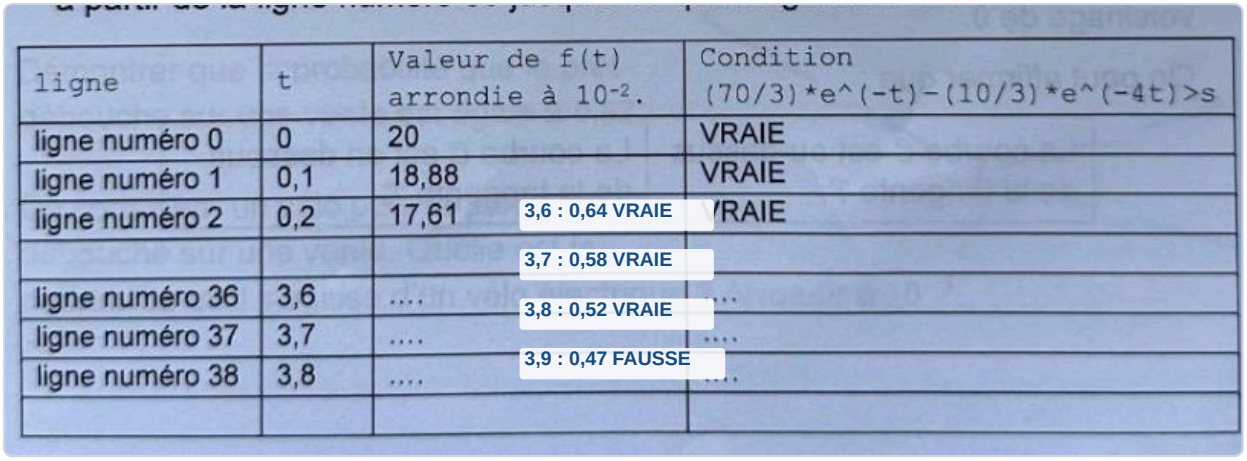
> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 0 sur $[0, +\infty[$.

Question 3. a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne numéro 36, en ajoutant les lignes nécessaires jusqu'à son arrêt. Indiquer les valeurs de t, de f(t) arrondie au centième et de la condition testée.

Ligne	t	$f(t)$**, arrondie au centième**	**Condition** $f(t) > 0,5$
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

La boucle continue tant que la distance dépasse 0,5 cm. Elle s'arrête donc à la ligne 39, lorsque le test devient faux.

Valeurs à inscrire dans le tableau



ligne	t	Valeur de f(t) arrondie à 10^{-2}.	Condition (70/3)*e^(-t)-(10/3)*e^(-4t)>s
ligne numéro 0	0	20	VRAIE
ligne numéro 1	0,1	18,88	VRAIE
ligne numéro 2	0,2	17,61	VRAIE
ligne numéro 36	3,6	....	....
ligne numéro 37	3,7	....	....
ligne numéro 38	3,8	....	....

✓ RÉPONSE À RETENIR

Ligne 39 : $t = 3,9$, $f(t) \approx 0,47$ et la condition est FAUSSE.

Question 3. b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Le test est encore vrai à $t = 3,8$, puis devient faux à $t = 3,9$. À la fin de la boucle, la variable conserve donc la valeur 3,9. Dans le contexte, le modèle indique que le tiroir est fermé à cette étape de l'algorithme, le seuil de 0,5 cm ayant été franchi entre 3,8 s et 3,9 s.

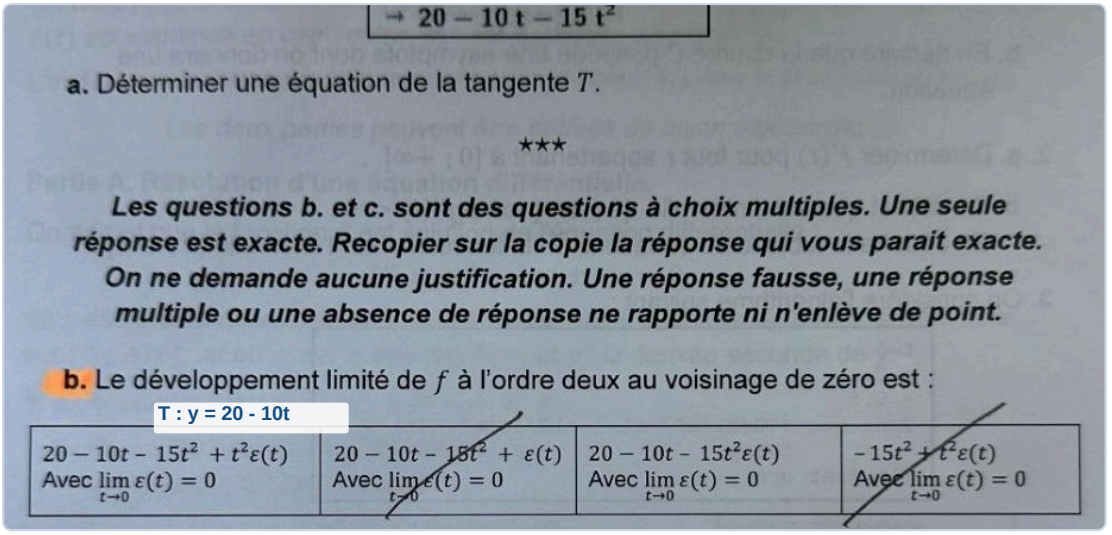
✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3,9$ s : le tiroir est fermé selon le test de l'algorithme.

Question 4. a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. D'après l'expression de f, on a $f(0) = 20$ et $f'(0) = -10$. En substituant ces deux valeurs, on obtient l'équation de la tangente demandée.

Équation de la tangente



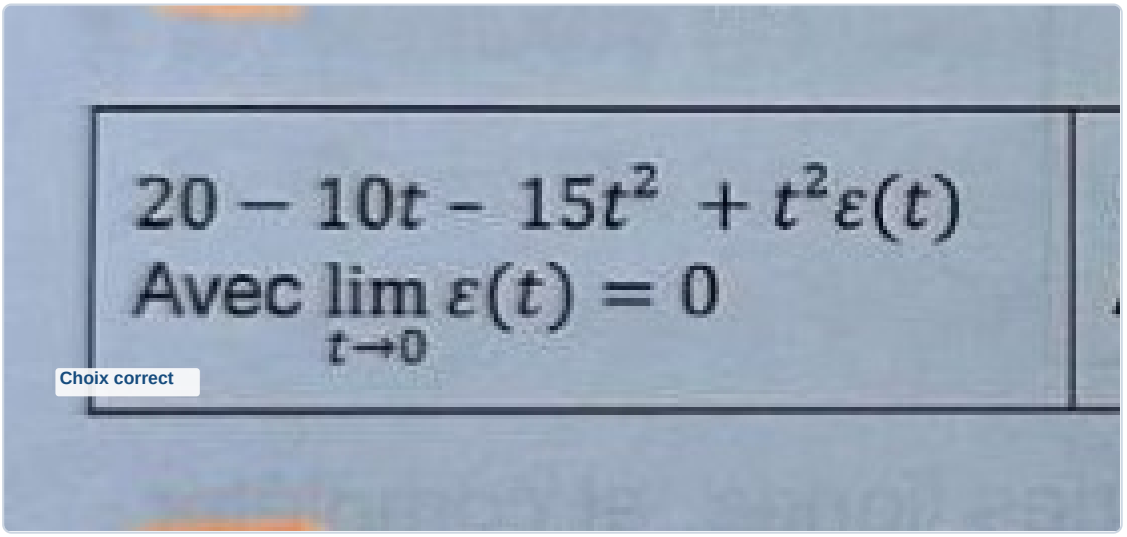
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$T : y = 20 - 10t$.

Question 4. b. Parmi les propositions données, recopier celle qui correspond au développement limité de f à l'ordre deux au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Le calcul formel indique que la partie régulière du développement limité à l'ordre deux est $20 - 10t - 15t^2$. La proposition exacte est celle qui complète cette partie par le reste d'ordre deux $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t)$ qui tend vers zéro lorsque t tend vers zéro.

Réponse au choix multiple



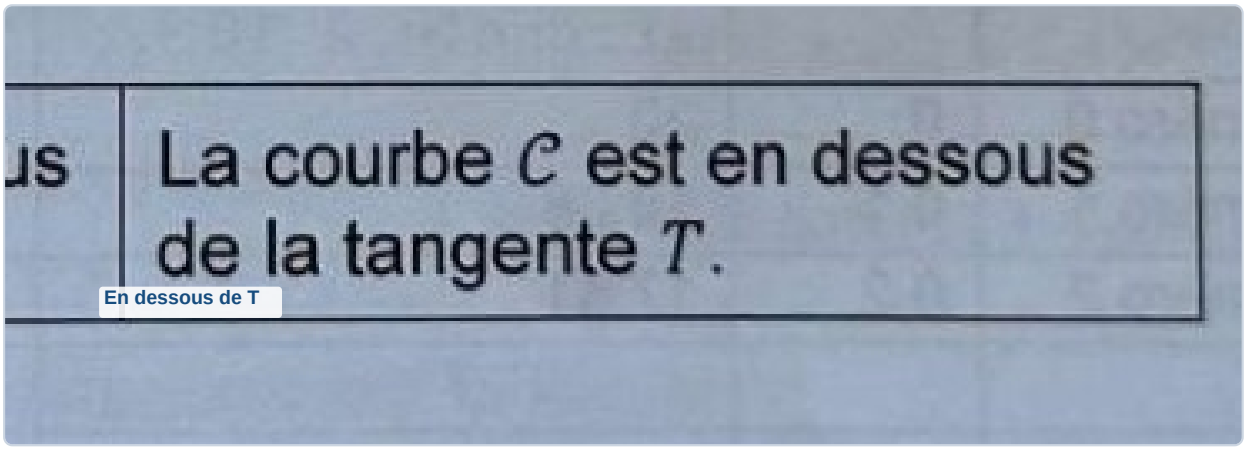
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$f(t) = 20 - 10t - 15t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 4. c. Indiquer si, au voisinage de zéro, la courbe représentative de f est au-dessus ou en dessous de sa tangente T. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

La tangente a pour équation $y = 20 - 10t$. La différence entre la fonction et cette tangente est donc $-15t^2 + t^2\varepsilon(t)$. Au voisinage de zéro, le terme dominant est négatif pour $t \neq 0$, car son coefficient est -15. La courbe se trouve donc sous la tangente.

Réponse au choix multiple



✓ RÉPONSE À RETENIR

Au voisinage de zéro, la courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de la tangente T.

2. Probabilités et estimation dans un magasin de vélos

Un magasin prête des vélos électriques ou mécaniques dans l'espoir de réaliser une vente, puis étudie les durées de réparation sur un échantillon de vélos. Il cherche aussi à estimer la proportion de clients susceptibles d'acheter un modèle haut de gamme.

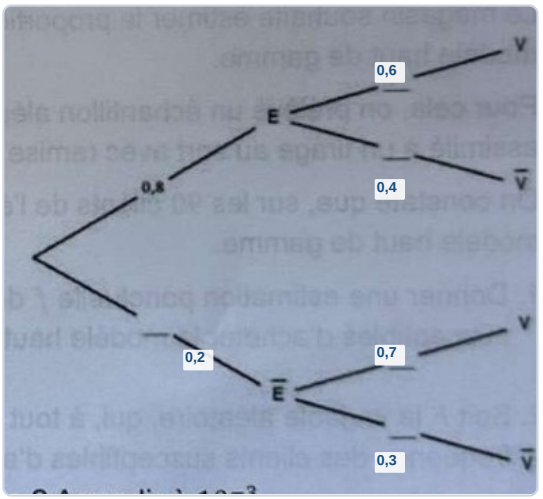
Partie A : probabilités conditionnelles

Question 1. Recopier et compléter l'arbre pondéré décrivant le type de vélo prêté et la réalisation ou non d'une vente, à partir des données fournies.

Branche	Probabilité
Vélo électrique E	$0,8$
Vélo mécanique $\overline{E}$	$0,2$
Vente sachant E	$0,6$
Pas de vente sachant E	$0,4$
Vente sachant $\overline{E}$	$0,7$
Pas de vente sachant $\overline{E}$	$0,3$

Les branches issues d'un même nœud sont complémentaires : les probabilités de non-vente valent $1-0,6=0,4$ et $1-0,7=0,3$.

Arbre pondéré complété



✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(E)=0,8$, $P(\overline{E})=0,2$; puis $P(V \mid E)=0,6$, $P(\overline{V} \mid E)=0,4$, $P(V \mid \overline{E})=0,7$, $P(\overline{V} \mid \overline{E})=0,3$.

Question 2. **Déterminer la probabilité qu'un vélo prêté soit électrique et que le prêt débouche sur une vente.**

On multiplie la probabilité de choisir un vélo électrique par la probabilité conditionnelle d'une vente : $P(E \cap V) = P(E)P(V \mid E) = 0,8 \times 0,6 = 0,48$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(E \cap V) = 0,48$.

Question 3. **Démontrer que la probabilité qu'un prêt débouche sur une vente est égale à 0,62.**

Type de vélo	Contribution à la probabilité de vente
Électrique	$0,8 \times 0,6 = 0,48$
Mécanique	$0,2 \times 0,7 = 0,14$

Les deux cas sont incompatibles. On additionne leurs probabilités : $P(V) = 0,48 + 0,14 = 0,62$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(V) = 0,62$.

Question 4. **Sachant que le prêt d'un vélo a débouché sur une vente, déterminer la probabilité qu'il s'agisse d'un vélo électrique. Arrondir à 10^{-3}.**

La probabilité recherchée est conditionnelle : $P(E \mid V) = \frac{P(E \cap V)}{P(V)} = \frac{0,48}{0,62} = 0,774193\ldots$. Arrondie au millième, elle vaut $0,774$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(E \mid V) \approx 0,774$.

Partie B : loi binomiale

Question 1. **On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Donner ses paramètres pour l'échantillon de 80 vélos réparés.**

Il y a 80 réparations indépendantes et, pour chacune, la probabilité d'une durée inférieure à une heure est $0,62$. Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0,62$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$X \sim \mathcal{B}(80\,;\,0,62)$.

Question 2. Déterminer la probabilité P(X = 40). Arrondir à 10^{-3}.

Avec $X \sim \mathcal{B}(80\,;\,0,62)$, $P(X=40) = \binom{80}{40}(0,62)^{40}(0,38)^{40} \approx 0,00829$. L'arrondi au millième est $0,008$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(X=40) \approx 0,008$.

Question 3. Déterminer la probabilité que, dans l'échantillon, le nombre de vélos dont la réparation nécessite moins d'une heure de main-d'œuvre soit strictement supérieur au nombre de vélos dont la réparation nécessite plus d'une heure. Arrondir à 10^{-3}.

Le nombre de vélos nécessitant plus d'une heure est $80 - X$. La condition demandée est donc $X > 80 - X$, soit $X \geq 41$. Ainsi, $P(X \geq 41) = 1 - P(X \leq 40) \approx 0,9809$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(X \geq 41) \approx 0,981$.

Partie C : intervalle de confiance

Question 1. À partir des 54 clients sur 90 susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme, donner l'estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p.

L'estimation ponctuelle est la fréquence observée : $f = \frac{54}{90} = 0,6$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f = 0,6$, soit 60 %.

Question 2. a. **À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % pour la proportion p.**

Calcul	Valeur
Fréquence observée	$f = 54/90 = 0,6$
Marge	$1,96\sqrt{0,6(1-0,6)/90} \approx 0,101214$
Bornes	$0,6 - 0,101214$ et $0,6 + 0,101214$

Au millième, l'intervalle obtenu est $[0,499\,;\,0,701]$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Intervalle de confiance à 95 % : $[0,499\,;\,0,701]$.

Question 2. b. **Indiquer si l'on peut être certain que la proportion p appartient à cet intervalle de confiance.**

Non. Le niveau de confiance de 95 % ne garantit pas que cet intervalle précis contienne la proportion inconnue. Il décrit la fréquence de réussite de la méthode sur un grand nombre d'échantillons.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, l'appartenance de p à cet intervalle n'est pas certaine.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2023, code 23MATGRB1, dure 2 heures et comporte deux exercices de 10 points. Le coefficient est 2 pour la plupart des spécialités et 3 pour Traitement des matériaux. Le sujet étudie la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et fonction exponentielle, puis les probabilités, la loi binomiale et l'intervalle de confiance dans un magasin de vélos.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les racines de l'équation caractéristique déterminent la forme générale des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants.
- Une fonction décroissante permet de suivre l'évolution d'une distance jusqu'à un seuil en analysant les valeurs successives de la variable dans une boucle Tant que.
- Pour une loi binomiale de paramètres n et p, $P(X = k) = C(n,k)\, p^k(1-p)^{n-k}$.
- L'intervalle de confiance fourni à 95 % est $f \pm 1{,}96\sqrt{f(1-f)/n}$; ce niveau ne garantit pas avec certitude que p appartient à l'intervalle.

Points de vigilance & attentes du jury

- Conserver les unités : f est une distance en centimètres et t un temps en secondes.
- Dans l'algorithme, vérifier la condition après chaque incrément de t et s'arrêter dès qu'elle devient fausse.
- Traduire la comparaison des effectifs avec une inégalité stricte, en distinguant les réparations de moins d'une heure de celles de plus d'une heure.
- Respecter la précision demandée : valeur exacte, arrondi au centième ou au millième selon chaque question.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du tiroir ?

On résout d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses racines donnent la forme générale de la solution, puis les conditions initiales déterminent les constantes.

Q : Comment traduire la comparaison des durées de réparation avec X ?

X désigne le nombre de réparations de moins d'une heure parmi 80. Le nombre de réparations de plus d'une heure est $80 - X$; la comparaison demandée se traduit par $X > 80 - X$.

Q : Quelle est la durée de l'épreuve et comment organiser son travail ?

L'épreuve dure 2 heures et comprend deux exercices de 10 points chacun. Les parties de l'exercice 1 et les trois parties de l'exercice 2 peuvent être traitées indépendamment lorsque le sujet le précise.

Q : Quels arrondis et justifications faut-il respecter ?

Suivez la précision indiquée dans chaque consigne, notamment au millième pour les probabilités. Justifiez les questions qui le demandent ; pour les questions à choix multiples 4 b et 4 c, aucune justification n'est attendue.

Sujet officiel associé (PDF) : https://bts-cpi.fr/assets/annales/bts-cpi/E2 - Mathématiques/2023/BTS CPI - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Conception des Produits Industriels : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.