Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation de la fermeture d'un tiroir (12 questions) **Page 3**

2. Séries de Fourier d'une fonction périodique paire (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 13**

Sujet officiel (PDF) : https://bts-cpi.fr/assets/annales/bts-cpi/E2 - Mathématiques/2023/BTS CPI - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation de la fermeture d'un tiroir

La distance f(t), en centimètres, entre le fond du meuble O et le fond du tiroir M décrit le mouvement de fermeture en fonction du temps t, en secondes. L'exercice mobilise une équation différentielle puis l'étude d'une fonction exponentielle pour déterminer la distance, le temps de fermeture et la position moyenne du tiroir.

Partie A

Question 1. a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

Pour résoudre le trinôme, on calcule son discriminant : $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Il est strictement positif, donc l'équation possède deux racines réelles distinctes. La formule $r = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2}$ donne ces racines.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$.

Question 1. b. À l'aide des solutions de l'équation caractéristique et du tableau fourni, résoudre l'équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0.

Les deux racines de l'équation caractéristique sont réelles et distinctes : -1 et -4. Le tableau fourni associe à chacune une solution exponentielle de la forme e^{rt}. La solution générale de l'équation différentielle est donc une combinaison linéaire de ces deux solutions indépendantes, avec des constantes réelles arbitraires.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2. a. À partir de la situation initiale où le point M se trouve à 20 cm de O et se déplace vers O à la vitesse négative de −10 cm·s⁻¹, déterminer f(0) et f'(0).

La fonction f désigne la distance OM, exprimée en centimètres. À l'instant initial, le point M se trouve à 20 cm de O : cette donnée fixe directement la valeur de la fonction. La vitesse indiquée est la dérivée de cette distance par rapport au temps. Elle est négative puisque M se rapproche de O.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm$\cdot$s^{-1}.

Question 2. b. Sachant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ − (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

Deux secondes après le début de la fermeture, on évalue la fonction en $t = 2$: $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$. Cette expression donne la distance exacte en centimètres. Son évaluation numérique, arrondie au millième, permet de situer la distance après deux secondes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$OM(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8} \approx 3{,}157$ cm.

Question 2. c. Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Vérifier si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, et justifier.

La fonction donnée est continue sur $[0;4]$. À l'instant initial, $f(0) = 20 > 0{,}5$, tandis qu'à 4 secondes, $f(4) \approx 0{,}427 < 0{,}5$. Par continuité, la distance est donc inférieure au seuil pour des instants situés juste avant 4 secondes. Le critère de fermeture est atteint avant l'échéance annoncée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui, le tiroir est fermé en moins de 4 s : $f(4) \approx 0{,}427 < 0{,}5$ cm.

Partie B

Question 1. a. En rappelant que la limite de e^{-u} vaut 0 lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.

La fonction est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Lorsque $t \to +\infty$, les deux exposants $-t$ et $-4t$ tendent vers $-\infty$. Les deux exponentielles tendent donc vers 0. Par somme et multiplication par des constantes, la limite de $f(t)$ vaut également 0.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1. b. Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote, puis donner une équation de cette asymptote.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et égale à 0. La courbe représentative admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$, qui est l'axe des abscisses.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2. a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chaque exponentielle en appliquant $(e^{at})' = ae^{at}$. Le premier terme apporte le facteur -1. Pour le second, la dérivée de e^{-4t} apporte -4, qui se combine avec le signe négatif du coefficient initial.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2. b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, déduire le tableau de variations de f sur cet intervalle.

Sur l'intervalle considéré, $f'(t) < 0$: la fonction est strictement décroissante. Elle commence en $f(0) = 20$ et tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$. Ces informations donnent le tableau de variations suivant.

t	**0**		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	20	↘	0

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. a. Compléter le tableau de suivi de l'algorithme à partir de la ligne 36, en ajoutant si nécessaire des lignes jusqu'à l'arrêt de l'algorithme. Indiquer pour chaque ligne la valeur de t, la valeur de f(t) arrondie au centième et le résultat du test de la condition de la boucle.

À chaque passage dans la boucle, t augmente de $0{,}1$. Le tableau ci-dessous donne la distance arrondie au centième ; le test est effectué sur la valeur non arrondie. La boucle continue tant que cette distance dépasse strictement $0{,}5$ cm. À la ligne 39, le test devient faux et l'algorithme s'arrête.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Test** $f(t) > 0{,}5$
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arrêt à la ligne 39, pour $t = 3{,}9$ s.

Question 3. b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.

À $t = 3{,}8$, la distance est encore d'environ $0{,}522$ cm, donc le test reste vrai. À $t = 3{,}9$, elle vaut environ $0{,}472$ cm et le test devient faux. La boucle s'arrête alors, et la variable conserve cette dernière valeur. Selon le seuil fixé dans l'énoncé, le tiroir est donc fermé à cet instant.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $t = 3{,}9$ s : le tiroir est fermé selon le critère de l'énoncé.

Question 4. La position moyenne est définie par m = (1/4)∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer que m = 45/8 − (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.

Une primitive de f est $F(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. Ainsi, $m = \frac{1}{4}\big(F(4) - F(0)\big)$. En séparant les termes constants et ceux qui contiennent les exponentielles, on obtient $\frac{70/3 - 5/6}{4} = \frac{45}{8}$, puis les deux termes évalués en 4.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}$.

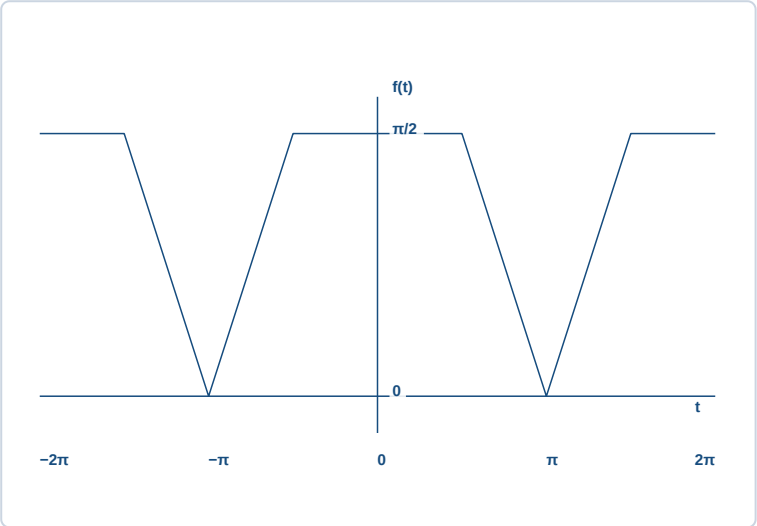
2. Séries de Fourier d’une fonction périodique paire

L’exercice étudie une fonction paire de période 2π, définie par morceaux sur [0 ; π]. Il porte sur son tracé, ses coefficients de Fourier, une somme partielle et l’approximation de la valeur efficace par les premiers coefficients.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l’intervalle [−2π ; 2π], en tenant compte de sa définition par morceaux, de sa parité et de sa périodicité.

Sur l’intervalle demandé, le motif se répète tous les 2π et est symétrique par rapport à l’axe vertical. La fonction reste égale à $\pi/2$ sur chaque plateau, puis décroît ou croît linéairement entre ce niveau et zéro. Les minima sont en $t = -\pi$ et $t = \pi$. Le tracé ci-joint reprend ces segments sur tout l’intervalle demandé.

Tracé de f sur [-2π ; 2π]



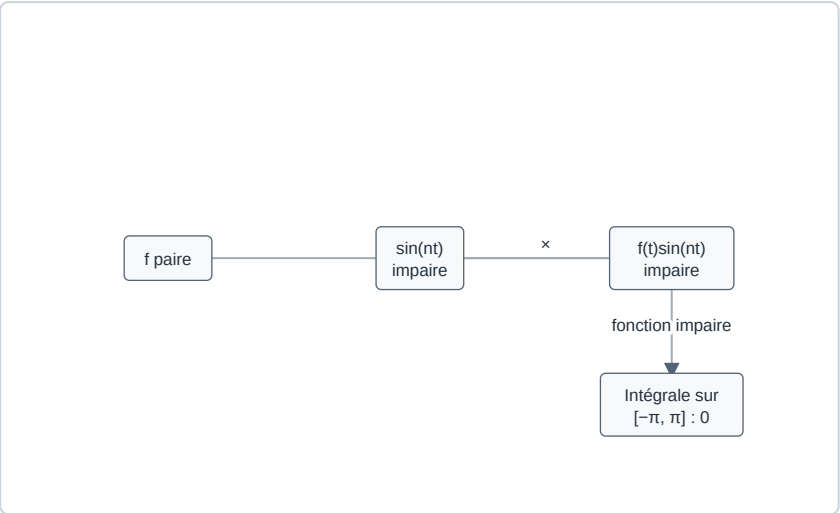
✓ RÉPONSE À RETENIR

Tracé pair et 2π-périodique : plateaux de hauteur $\pi/2$, minima nuls en $t = \pm\pi$.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

Pour tout entier $n \geq 1$, le coefficient b_n est proportionnel à l’intégrale de $f(t)\sin(nt)$ sur une période. La fonction f est paire, tandis que $\sin(nt)$ est impaire. Leur produit est donc impair. Son intégrale sur l’intervalle symétrique $[-\pi, \pi]$ est nulle. Comme ce produit est 2π-périodique, cette intégrale correspond à celle sur une période.

Parité utilisée pour b_n



Le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire est impair.

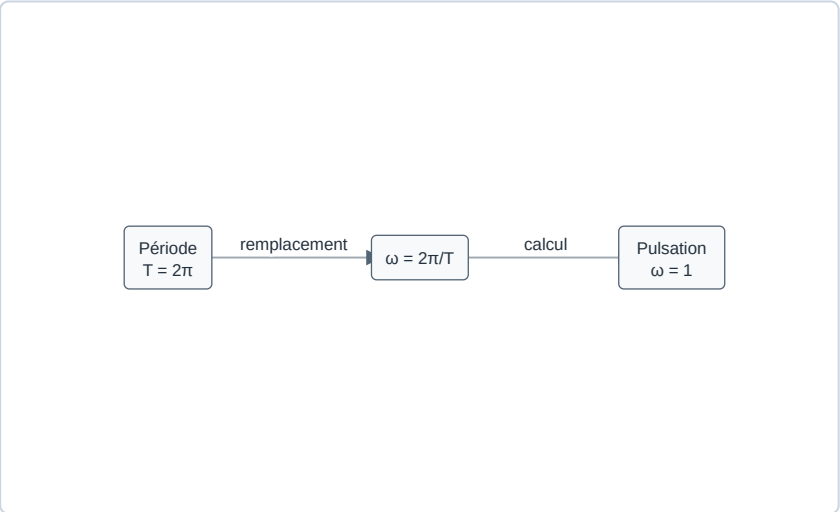
✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f, sachant que sa période est T = 2π.

La période de la fonction est $T = 2\pi$. D'après le formulaire, la pulsation vérifie $\omega = \frac{2\pi}{T}$. En remplaçant T par sa valeur, on obtient $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$. La série de Fourier utilise donc les termes $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$, sans facteur supplémentaire dans leurs arguments.

Lien entre période et pulsation



Valeur obtenue avec la période donnée dans l'énoncé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\omega = 1$ radian par unité de temps.

Question 4. Démontrer que le coefficient constant de Fourier a₀ est égal à 3π/8.

Le formulaire donne $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$. La fonction étant paire, on peut aussi écrire $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt$. On sépare l'intégrale au point où la définition de f change, puis on additionne les deux aires :

Intervalle	Expression de f	Contribution à l'intégrale
$[0, \pi/2]$	$\pi/2$	$\pi^2/4$
$[\pi/2, \pi]$	$\pi - t$	$\pi^2/8$

Ainsi, $a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8}\right)$.

Intégrale utilisée pour a₀

Intervalle	Expression de f	Contribution à l'intégrale
[0, π/2]	π/2	π²/4
[π/2, π]	π − t	π²/8
Total		3π²/8

La somme des contributions est ensuite divisée par π.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, aₙ = ∫₀^(π/2) cos(nt)dt + (2/π)∫_(π/2)^π (π − t)cos(nt)dt.

Pour une fonction paire, le formulaire donne $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)\,dt$. La définition de f change à $t = \pi/2$. On découpe donc l'intégrale à cette valeur, en utilisant l'expression adaptée sur chaque intervalle :

1. Sur $[0, \pi/2]$, $f(t) = \pi/2$, donc le facteur $\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2}$ vaut 1.
2. Sur $[\pi/2, \pi]$, $f(t) = \pi - t$, et le facteur reste $\frac{2}{\pi}$.

La somme des deux intégrales est bien la formule demandée.

Découpage de l'intégrale de Fourier

Intervalle	f(t)	Contribution à aₙ
[0, π/2]	π/2	∫₀^(π/2) cos(nt) dt
[π/2, π]	π − t	(2/π)∫_(π/2)^π (π − t) cos(nt) dt

Le découpage suit les deux expressions de la définition par morceaux.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_n = \int_0^{\pi/2} \cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,dt$, pour tout $n \geq 1$.

Question 6. En admettant que $a_n = 2/(\pi n^2)(\cos(n\pi/2) - \cos(n\pi))$, déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.

On applique la formule admise $a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right)$. Pour $n = 1$ et $n = 3$, la différence des cosinus vaut 1. Pour $n = 2$, elle vaut -2. La substitution de ces trois valeurs dans la formule donne :

n	$\cos(n\pi/2)$	$\cos(n\pi)$	a_n
1	0	−1	$2/\pi$
2	−1	1	$-1/\pi$
3	0	−1	$2/(9\pi)$

Premiers coefficients cosinus

n	cos(nπ/2)	cos(nπ)	a_n
1	0	−1	2/π
2	−1	1	−1/π
3	0	−1	2/(9π)

Valeurs exactes obtenues par substitution dans la formule admise.

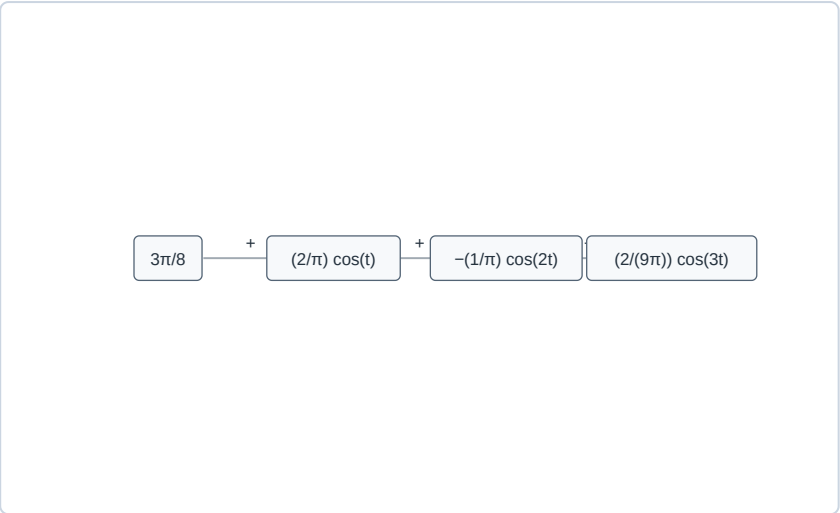
✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_1 = \frac{2}{\pi}, \quad a_2 = -\frac{1}{\pi}, \quad a_3 = \frac{2}{9\pi}$.

Question 7. Déduire des coefficients obtenus l'expression de la somme partielle $s_3(t)$.

La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))$. Les coefficients b_n sont nuls puisque f est paire. En remplaçant a_0, a_1, a_2 et a_3 par leurs valeurs exactes, il ne reste que les quatre termes suivants. Le coefficient de $\cos(2t)$ est négatif.

Termes de la somme partielle s_3



La somme des quatre termes donne $s_3(t)$.

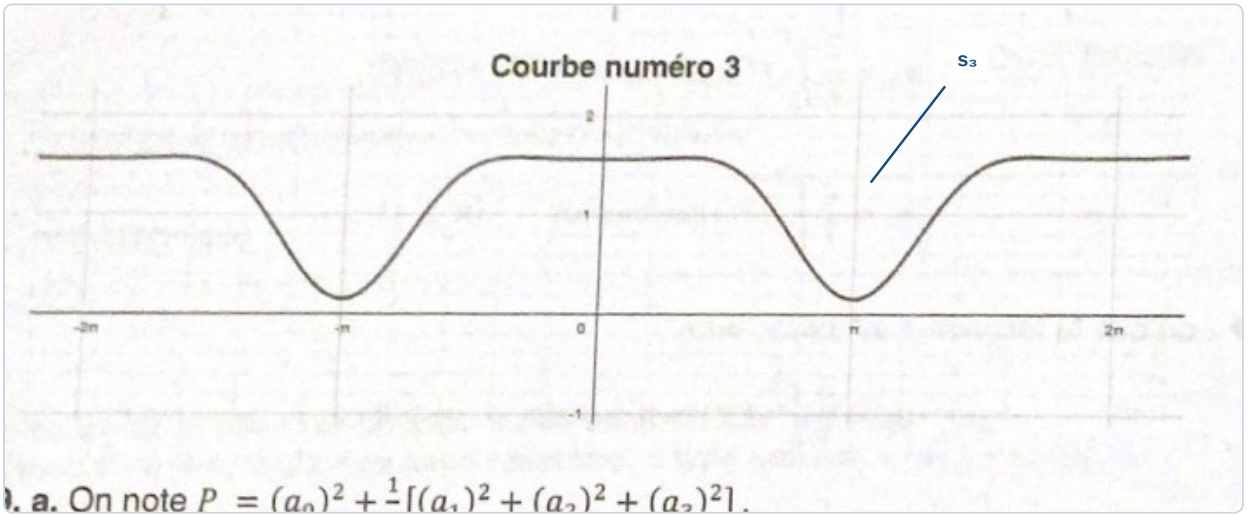
✓ RÉPONSE À RETENIR

$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t)$.

Question 8. Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées représente la fonction s_3.

La somme partielle s_3 est une fonction paire de période 2π. Son tracé est lisse et présente des creux arrondis près de $t = -\pi$ et $t = \pi$, avec des niveaux élevés autour de $t = 0$. Parmi les figures de la page 6, ces caractéristiques correspondent à la courbe numéro 3. L'annotation du visuel repère ce tracé sur la page originale.

Courbe correspondant à s_3



✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe numéro 3.

Question 9. a. **Pour P = $(a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, donner une valeur approchée de P à 10^{-4}.**

Les coefficients exacts donnent $P = (3\pi/8)^2 + \frac{1}{2}((2/\pi)^2 + (-1/\pi)^2 + (2/(9\pi))^2)$. La somme des carrés des trois coefficients non constants vaut $409/(81\pi^2)$. Ainsi, $P = 9\pi^2/64 + 409/(162\pi^2)$. L'évaluation numérique, arrondie au dix-millième comme demandé, fournit la valeur de l'approximation.

Contributions au calcul de P

Terme	Valeur exacte
a_0^2	$9\pi^2/64$
$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$	$409/(81\pi^2)$
P	$9\pi^2/64 + 409/(162\pi^2)$

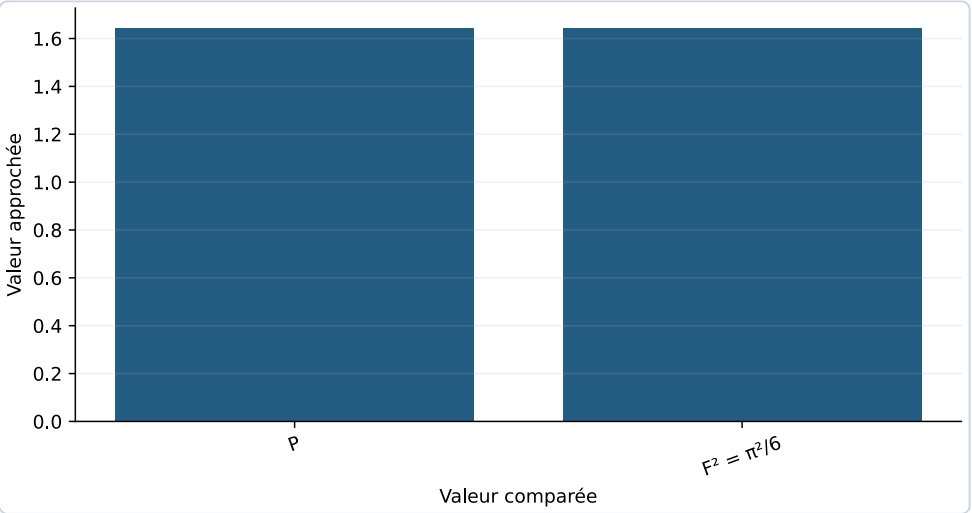
La somme des contributions est évaluée à 10^{-4} près.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P \approx 1{,}6437.$

Question 9. b. **La valeur efficace F vérifie $F^2 = \pi^2/6$ et P constitue une approximation de F^2. Choisir, parmi 0,1 %, 1 % et 10 %, le pourcentage d'erreur de cette approximation. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

La valeur exacte à laquelle comparer l'approximation est $F^2 = \pi^2/6$. Le pourcentage d'erreur relatif se calcule par $\frac{|F^2 - P|}{F^2} \times 100$. En utilisant la valeur non arrondie de P, on obtient environ $0{,}074\%$. Parmi les trois choix de la page, la proposition correspondante est $0{,}1\%$.



✓ RÉPONSE À RETENIR

$0{,}1\%.$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, porte le code 23MATGRB2 et dure deux heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Elle étudie la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et fonctions exponentielles, puis une fonction périodique paire, ses séries de Fourier et l'approximation de sa valeur efficace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, les racines de l'équation caractéristique déterminent la forme des solutions.
- La valeur moyenne de f sur [0 ; T] est $(1/T)\int_0^T f(t)dt$.
- Pour une fonction paire de période T, $b_n = 0$ et $a_n = (4/T)\int_0^{(T/2)} f(t)\cos(n\omega t)dt$.
- La somme partielle s_n conserve les termes de Fourier jusqu'à l'indice n ; ici s_3 utilise a_0, a_1, a_2 et a_3.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les conditions initiales du tiroir, notamment le signe négatif de sa vitesse.
- Distinguer la distance f(t), exprimée en centimètres, du temps t, exprimé en secondes.
- Dans le tableau de l'algorithme, appliquer le pas de 0,1 et l'arrondi au centième indiqués.
- Calculer le pourcentage d'erreur en comparant P à la valeur de référence $F^2 = \pi^2/6$.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la solution de l'équation différentielle du tiroir ?

Résoudre d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses racines donnent la forme générale de la solution. Utiliser ensuite f(0) et f'(0) pour déterminer les constantes à partir de la position et de la vitesse initiales.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls dans l'exercice sur les séries de Fourier ?

La fonction f est paire, tandis que sin(nt) est impaire. Leur produit est donc impair et son intégrale sur un intervalle symétrique est nulle. Ainsi, tous les coefficients b_n sont nuls pour n supérieur ou égal à 1.

Q : Comment gérer le temps dans cette épreuve de deux heures ?

Aucun temps par exercice n'est imposé. Répartir les deux heures entre les deux exercices, réserver un temps suffisant aux calculs et aux justifications, puis vérifier les unités, les arrondis et les réponses à choix multiples.

Q : Quels critères de méthode faut-il respecter pour les questions de Fourier ?

Utiliser les conventions du formulaire, notamment $\omega = 2\pi/T$ et la formule des coefficients d'une fonction paire. Pour les questions qui le demandent, détailler les calculs ; pour la courbe et le choix multiple, suivre la consigne de justification donnée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://bts-cpi.fr/assets/annales/bts-cpi/E2 - Mathématiques/2023/BTS CPI - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Conception des Produits Industriels : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.