Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS CONCEPTION DES PRODUITS INDUSTRIELS • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRD1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Refroidissement de l'eau d'un spa (12 questions) **Page 3**

2. Contrôles qualité et étude de clientèle d'une minoterie (12 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 12**

Sujet officiel (PDF) : https://bts-cpi.fr/assets/annales/bts-cpi/E2 - Mathématiques/2023/BTS CPI - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf

1. Refroidissement de l'eau d'un spa

L'eau d'un spa est initialement à 38 °C et son chauffage est coupé, tandis que la température ambiante reste à 25 °C. Une équation différentielle modélise l'évolution de sa température, étudiée jusqu'au déclenchement d'une alarme et à l'aide d'un algorithme.

Partie A

Question 1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle homogène y' + 0,05y = 0 sur l'intervalle [0 ; +∞[.

L'équation s'écrit $y' = -0{,}05y$. Sa solution générale est une fonction exponentielle de coefficient −0,05, multipliée par une constante réelle.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> **$y(t) = Ce^{-0{,}05t}$**, avec C réel.

Question 2. Déterminer sur [0 ; +∞[une fonction constante solution particulière de l'équation différentielle y' + 0,05y = 1,25.

Pour une fonction constante $y(t) = k$, on a $y'(t) = 0$. L'équation impose alors $0{,}05k = 1{,}25$, d'où $k = 1{,}25 \div 0{,}05 = 25$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> Une solution particulière constante est **y(t) = 25**.

Question 3. En déduire les solutions de l'équation différentielle y' + 0,05y = 1,25.

Les solutions de l'équation complète sont obtenues en ajoutant la solution particulière 25 aux solutions de l'équation homogène. On obtient donc la famille suivante.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> **$y(t) = Ce^{-0{,}05t} + 25$**, avec C réel.

Question 4. En utilisant la condition f(0) = 38, montrer que $f(t) = 13e^{-0.05t} + 25$ pour tout t de [0 ; +∞[.

La solution générale s'écrit $f(t) = Ce^{-0{,}05t} + 25$. Comme $f(0) = 38$, on a $C + 25 = 38$, donc $C = 13$. L'expression obtenue est valable pour tout $t \geq 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 13e^{-0,05t} + 25$, pour tout $t \geq 0$.

Partie B

Question 1. Calculer f(24), arrondir la valeur au dixième et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

On remplace t par 24 : $f(24) = 13e^{-0,05\times24} + 25 \approx 28,9155$. Après arrondi au dixième, la température de l'eau est de 28,9 °C, 24 heures après l'arrêt du chauffage.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f(24) ≈ 28,9 °C.

Question 2. a). Déterminer une expression de f'(t) pour tout t de [0 ; +∞[.

En dérivant l'exponentielle composée, $(e^{-0,05t})' = -0,05e^{-0,05t}$. La dérivée de 25 est nulle, donc $f'(t) = 13 \times (-0,05)e^{-0,05t}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -0,65e^{-0,05t}$, pour tout $t \geq 0$.

Question 2. b). Déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞[et argumenter si ce sens de variation est cohérent avec le contexte.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,05t}$ est strictement positif. Ainsi, $f'(t) = -0,65e^{-0,05t}$ est strictement négatif.

La fonction f est donc strictement décroissante sur [0 ; +∞[. C'est cohérent avec le contexte : le chauffage est coupé et l'eau refroidit.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f est strictement décroissante sur [0 ; +∞[.

Question 3. a). Déterminer la limite de f en +∞.

Lorsque t tend vers +∞, −0,05t tend vers −∞, donc $e^{-0,05t}$ tend vers 0. Dans $f(t) = 13e^{-0,05t} + 25$, le terme exponentiel tend vers 0.

✓ RÉPONSE À RETENIR

lim f(t) = 25 lorsque t tend vers +∞.

Question 3. b). Interpréter la valeur de cette limite dans le contexte de l'exercice.

Cette limite est la température vers laquelle tend l'eau lorsque le temps écoulé devient très grand et que le chauffage reste coupé. Elle est égale à la température ambiante donnée dans l'énoncé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

À long terme, l'eau tend vers **25 °C**.

Question 4. a). L'alarme retentit lorsque la température devient strictement inférieure à la température programmée. Pour un réglage à 36 °C, déterminer par le calcul le temps écoulé avant que l'alarme retentisse, puis donner la valeur exacte et la valeur arrondie à la minute.

Le seuil est atteint lorsque $13e^{-0,05t} + 25 = 36$, donc $e^{-0,05t} = 11/13$. En prenant le logarithme, $t = 20 \ln(13/11)$ heures, soit environ 200,465 minutes. L'alarme, réglée pour une température strictement inférieure à 36 °C, retentit juste après cet instant.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Durée exacte : 20 ln(13/11) h, soit **3 h 20 min** à la minute près.

Question 4. b). Déterminer la valeur numérique affichée par l'algorithme qui augmente H d'une heure et actualise T jusqu'à ce que T soit strictement inférieur à 34 °C.

À H = 7, la température calculée est $13e^{-0,05\times7} + 25 \approx 34,161$ °C : la condition T ≥ 34 reste vraie. À H = 8, elle vaut environ 33,714 °C, donc la boucle s'arrête et l'algorithme affiche H.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Valeur affichée : 8.

Question 4. c). Expliquer ce que l'algorithme permet de déterminer dans le contexte de l'exercice.

L'algorithme augmente H d'une heure et actualise la température jusqu'à ce qu'elle soit strictement inférieure à 34 °C. Il détermine ainsi le premier nombre entier d'heures après la coupure auquel la température de l'eau passe sous 34 °C.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Il détermine le premier nombre entier d’heures où l’eau passe sous **34 °C**.

2. Contrôles qualité et étude de clientèle d'une minoterie

Une minoterie contrôle l'extensibilité de pâtes et le taux d'humidité de livraisons de blé, puis modélise la masse de ses sacs de farine. L'exercice étudie également, à l'aide de probabilités, l'acceptation d'une nouvelle farine par différents types de clients et le nombre de clients concernés dans un échantillon.

Partie A

Question 1. a). À partir des cinq indices d'extensibilité mesurés sur les échantillons de pâte, calculer la moyenne de la série et son écart-type arrondi au centième.

Les cinq mesures lues sur le sujet sont 104, 81, 83, 57 et 55 mm. Leur moyenne est $\bar{x} = (104 + 81 + 83 + 57 + 55)/5 = 76$ mm. L'écart-type de la série se calcule en faisant la moyenne des carrés des écarts à 76, puis en prenant la racine carrée : $\sigma = \sqrt{(28^2 + 5^2 + 7^2 + 19^2 + 21^2)/5} = \sqrt{332} \approx 18,22$ mm.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Moyenne : 76 mm ; écart-type : 18,22 mm.

Question 1. b). En prenant l'écart-type égal à 18 mm, vérifier qu'aucune des cinq valeurs de la série n'est en dehors de l'intervalle [x̄ − 2σ ; x̄ + 2σ], puis conclure sur la nécessité de tester cinq nouveaux échantillons.

Calcul	Résultat
Borne inférieure : $76 - 2 \times 18$	40 mm
Borne supérieure : $76 + 2 \times 18$	112 mm
Mesures observées	104, 81, 83, 57 et 55 mm

Les cinq mesures appartiennent à l'intervalle $[40\,;\,112]$. Aucune n'est en dehors de l'intervalle de contrôle : le technicien n'a pas à tester cinq nouveaux échantillons.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Toutes les mesures sont dans [40 ; 112] mm : aucun nouveau test n'est nécessaire.

Question 2. À partir des masses et des taux d'humidité des deux chargements de blé, montrer que le technicien peut autoriser leur déchargement dans un même silo, sachant que le taux d'humidité du mélange doit être inférieur à 13 %.

Le taux d'humidité du mélange se calcule en pondérant chaque taux par la masse correspondante. On obtient $\frac{29\,540 \times 12,4 + 14\,540 \times 14,1}{29\,540 + 14\,540} \approx 12,96$ %. Comme ce taux est inférieur à la limite de 13 % exigée par le cahier des charges, les deux chargements peuvent être déversés dans le même silo.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Humidité du mélange : environ 12,96 % ; déchargement autorisé.

Partie B

Question 1. La masse X d'un sac suit une loi normale de moyenne 25,2 kg et d'écart-type 0,1 kg. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'un sac prélevé au hasard ait une masse inférieure à 25 kg.

On centre et réduit la variable : $Z = (X - 25,2)/0,1$. Pour une masse de 25 kg, le score réduit vaut $(25 - 25,2)/0,1 = -2$. La probabilité demandée est donc $P(Z < -2)$, pour une loi normale centrée réduite. La lecture de cette probabilité donne environ 0,02275, soit 0,023 au millième près.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(X < 25) \approx 0,023$.

Question 2. a). Déterminer un réel h tel que P(25,2 − h ≤ X ≤ 25,2 + h) soit égale à environ 0,95, à 10^{-2} près.

1. Pour une loi normale, l'intervalle centré sur la moyenne contenant environ 95 % des valeurs s'étend à environ 1,96 écart-type de chaque côté.
2. Ici, l'écart-type vaut 0,1 kg, donc $h \approx 1,96 \times 0,1 = 0,196$ kg.

Au centième près, on retient $h = 0,20$ kg.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$h \approx 0,20$ kg.

Question 2. b). À l'aide de la représentation graphique fournie, expliquer pourquoi cette courbe ne peut pas être celle de la fonction de densité de la variable aléatoire X.

La variable X a un écart-type de seulement 0,1 kg. Ainsi, environ 95 % des masses devraient se trouver entre $25,2 - 1,96 \times 0,1 = 25,004$ kg et $25,2 + 1,96 \times 0,1 = 25,396$ kg. Or la courbe du sujet est visiblement beaucoup plus étalée autour de 25,2 kg : sa dispersion ne correspond pas à l'écart-type annoncé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

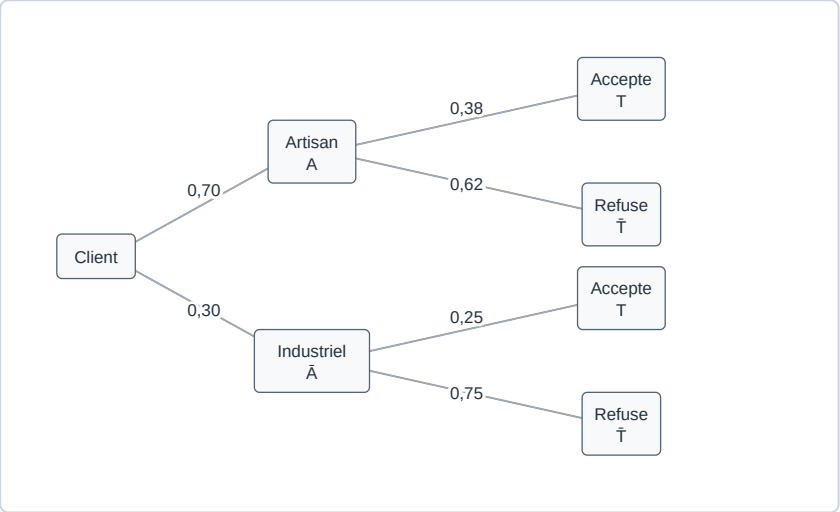
La courbe est trop étalée : environ 95 % des masses devraient être entre 25,00 et 25,40 kg.

Partie C

Question 1. Représenter par un arbre pondéré la situation décrivant le type de client et son acceptation de tester la farine La Romaine.

On note A l'événement « le client est artisan boulanger » et T l'événement « il accepte de tester La Romaine ». Les probabilités des premières branches sont $P(A) = 0,70$ et $P(\overline{A}) = 0,30$. Les probabilités conditionnelles d'acceptation sont respectivement 0,38 et 0,25 ; celles de refus sont leurs complémentaires.

Arbre pondéré des clients et de l'acceptation du test



A : artisan boulanger ; Ā : boulanger industriel ; T : accepte de tester La Romaine.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Branches : 0,70 et 0,30 ; puis acceptation/refus : 0,38/0,62 et 0,25/0,75.

Question 2. a). Calculer la probabilité que le client choisi soit un artisan boulanger et accepte de tester la farine La Romaine.

Le cas demandé correspond au chemin où le client est artisan boulanger puis accepte le test. On multiplie la probabilité de la première branche par la probabilité conditionnelle de la seconde : $P(A \cap T) = P(A) \times P(T \mid A) = 0,70 \times 0,38 = 0,266$. La probabilité recherchée est donc 0,266.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A \cap T) = 0,266$.

Question 2. b). Montrer que la probabilité qu'un client accepte de tester la farine La Romaine est égale à 0,341.

Type de client	Calcul de la probabilité d'accepter	Résultat
Artisan boulanger	$0,70 \times 0,38$	0,266
Boulanger industriel	$0,30 \times 0,25$	0,075

Ces deux cas sont incompatibles et couvrent tous les clients. Ainsi, $P(T) = 0,266 + 0,075 = 0,341$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité qu'un client accepte le test est 0,341.

Question 3. Sachant qu'un client a testé la farine La Romaine, calculer à 10^{-3} près la probabilité qu'il soit artisan boulanger.

Par définition d'une probabilité conditionnelle, $P(A \mid T) = \frac{P(A \cap T)}{P(T)}$. Les probabilités obtenues précédemment donnent $P(A \cap T) = 0,266$ et $P(T) = 0,341$. Donc $P(A \mid T) = 0,266 / 0,341 \approx 0,780059$, soit 0,780 au millième près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité recherchée est 0,780.

Question 4. a). Pour Y suivant la loi binomiale de paramètres n = 200 et p = 0,341, calculer à 10^{-3} près la probabilité qu'au plus 60 clients de l'échantillon aient testé la farine La Romaine.

1. Avec $Y \sim \mathcal{B}(200\,;\,0,341)$, « au plus 60 » signifie $Y \leq 60$.
2. On calcule la probabilité cumulée des issues de 0 à 60 : $P(Y \leq 60) = \sum_{k=0}^{60} \binom{200}{k} (0,341)^k (0,659)^{200-k}$.

Le calcul donne environ 0,125 au millième près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(Y \leq 60) \approx 0,125$.

Question 4. b). Calculer l'espérance de Y et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

L'espérance d'une loi binomiale de paramètres n et p vaut np. Ainsi, $E(Y) = 200 \times 0,341 = 68,2$. Cela signifie que, sur un grand nombre d'échantillons de 200 clients, le nombre moyen de clients ayant testé La Romaine est de 68,2 par échantillon.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$E(Y) = 68,2$ clients en moyenne par échantillon de 200.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, code 23MATGRD1, dure 2 heures et a pour coefficient 2. Elle étudie le refroidissement de l'eau d'un spa et plusieurs contrôles ainsi que la commercialisation d'une farine en minoterie. Les compétences évaluées mobilisent équations différentielles, dérivation, statistiques, lois normale et binomiale, probabilités conditionnelles et algorithmique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y' + ay = b$, une solution constante particulière est b/a lorsque a est non nul.
- Le taux d'humidité d'un mélange se calcule par moyenne pondérée selon les masses des chargements.
- La densité d'une loi normale est symétrique autour de sa moyenne et son maximum se situe en cette moyenne.
- Pour Y suivant une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance est $E(Y) = np$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Dans le contrôle qualité, utiliser l'écart-type de 18 mm explicitement imposé pour tester l'intervalle $\bar{x} \pm 2\sigma$.
- Calculer l'humidité du mélange avec les masses totales et non par la moyenne simple des deux taux.
- Dans l'arbre pondéré, inscrire les probabilités conditionnelles sur les branches et vérifier les probabilités complémentaires.
- Justifier les calculs, préciser les unités et respecter les arrondis demandés dans chaque question.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment vérifier si les mesures d'extensibilité imposent de nouveaux tests ?

Calculez la moyenne, puis construisez l'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma ; \bar{x} + 2\sigma]$ avec $\sigma = 18$ mm, comme l'indique la question. Comparez chacune des cinq mesures aux bornes : une valeur extérieure entraîne des tests complémentaires.

Q : Comment calculer le taux d'humidité du mélange de deux camions ?

Multipliez la masse de chaque chargement par son taux d'humidité pour obtenir la masse d'eau correspondante. Additionnez ces masses d'eau, divisez par la masse totale des deux chargements, puis comparez le taux obtenu au seuil strict de 13 %.

Q : Comment calculer la probabilité qu'au plus 60 clients testent la farine ?

Pour Y de loi binomiale avec $n = 200$ et $p = 0{,}341$, calculez $P(Y \leq 60)$. Une calculatrice ou un logiciel donne directement cette probabilité cumulée, à arrondir au millième comme demandé.

Q : Comment justifier la probabilité qu'un client ayant testé la farine soit artisan boulanger ?

Notez A l'événement « le client est artisan boulanger » et T l'événement « il accepte de tester la farine ». Utilisez $P(A|T) = P(A \cap T) / P(T)$, puis arrondissez le résultat à 10^{-3}.

Sujet officiel associé (PDF) : https://bts-cpi.fr/assets/annales/bts-cpi/E2 - Mathématiques/2023/BTS CPI - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf

Ressources BTS Conception des Produits Industriels : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.