BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

"CONCEPTION DE PRODUITS INDUSTRIELS"

SESSION 2008

***

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures **Coefficient : 2**

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire de mathématiques est autorisé.

Une feuille de papier millimétré est fournie.

Le sujet comprend 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 2 pages numérotées 1 et 2.

EXERCICE 1 (6 points)

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - y = (-4x - 6)\,\mathrm{e}^{-x}$
où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$ et y'' sa fonction dérivée seconde.

1° Déterminer les solutions sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle (E_0) :

$$y'' - y = 0.$$

2° Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = (x^2 + 4x)\,\mathrm{e}^{-x}$.
Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation (E).

3° En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 3$ et $f'(0) = 1$.

B. Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = (x^2 + 4x + 3)\,\mathrm{e}^{-x}$.

1° a) Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.

b) En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est : $f(x) = 3 + x - \frac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

2° On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

a) Déduire de la question précédente une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

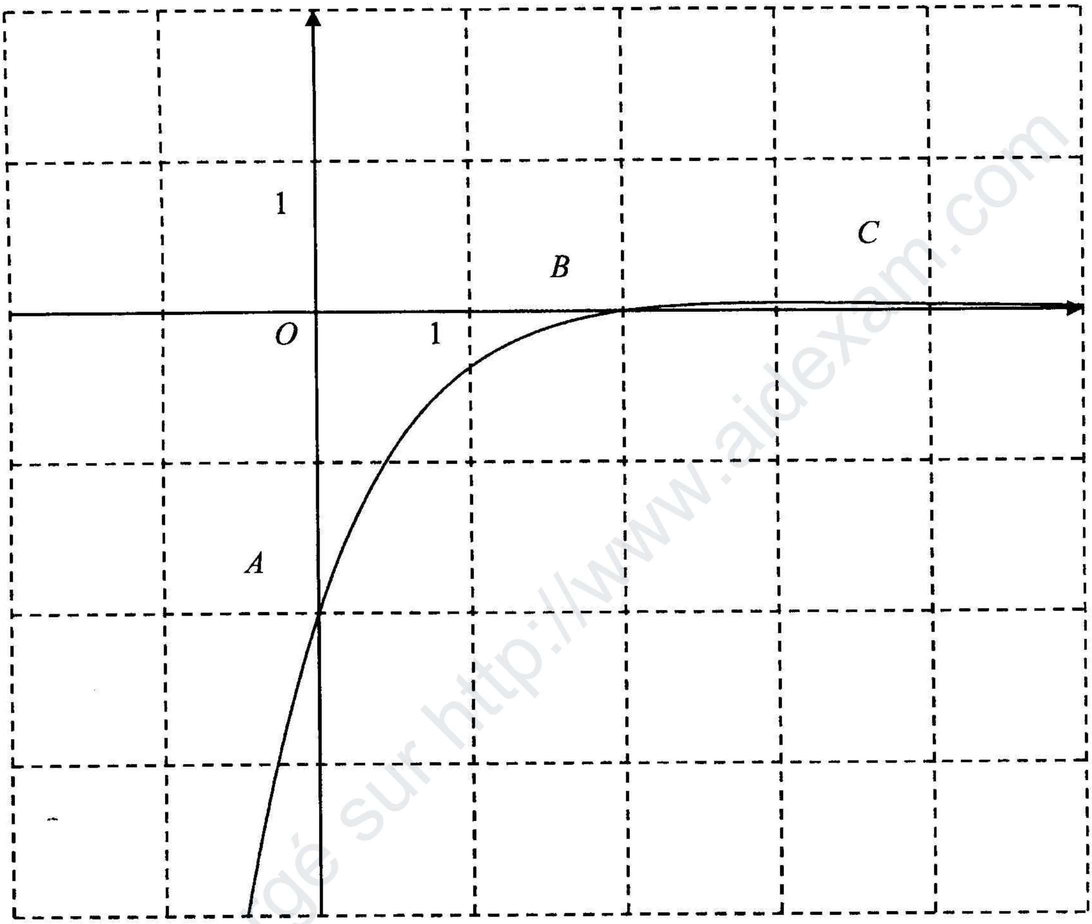
b) Étudier les positions relatives de C et T au voisinage du point d'abscisse 0.

EXERCICE 2 (5 points)

A. Étude des variations d'une fonction

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = (ax + b)\,\mathrm{e}^{-x}$, où a et b sont deux nombres réels.

La courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal où **l'unité graphique est 2 cm** est donnée ci-dessous.



1° La courbe C passe par les points A et B de coordonnées respectives $(0, -2)$ et $(2, 0)$.
Déterminer les nombres réels a et b.

Dans la suite de cet exercice, on admet que la fonction f est définie sur R par
$$f(x) = (x - 2)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

2° a) Démontrer que, pour tout x de **R**, $f'(x) = (3 - x)\,\mathrm{e}^{-x}$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur **R**.

c) Établir le tableau de variation de f.

Dans ce tableau, on ne demande pas de faire figurer les limites.

On note $I = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

1° À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $I = -1 - \mathrm{e}^{-2}$.

2° a) En déduire la valeur exacte de l'aire S en cm^2 de la partie du plan limitée par les axes de coordonnées et la courbe C entre les points A et B d'abscisses respectives 0 et 2.

b) Donner la valeur approchée de S arrondie à 10^{-2}.

EXERCICE 3 (9 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\ \vec{i},\ \vec{j})$ où l'unité graphique est 2 centimètres.
On appelle courbe de Bézier définie par les points de définition A_i $(0 \leq i \leq n)$ l'ensemble des points $M(t)$ tels que : $\overrightarrow{OM(t)} = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\,\overrightarrow{OA_i}$ où $B_{i,n}(t) = C_n^i\, t^i (1-t)^{n-i}$.

A. Construction d'une courbe de Bézier C_1

Dans cette question, on s'intéresse à la courbe de Bézier C_1 définie par les quatre points de définition A(0, 1) ; $B(2, 1)$; $C(0, 2)$; $D(0, 4)$, dans cet ordre.

1° Démontrer que, pour tout t de [0, 1], $B_{1,3}(t) = 3t - 6t^2 + 3t^3$.

2° On admet que, pour tout t de [0, 1] :
$B_{0,3}(t) = 1 - 3t + 3t^2 - t^3$; $B_{2,3}(t) = 3t^2 - 3t^3$ et $B_{3,3}(t) = t^3$.
En déduire qu'un système d'équations paramétriques de la courbe C_1 est :

$$\begin{cases} x = f_1(t) = 6t - 12t^2 + 6t^3 \\ y = g_1(t) = 1 + 3t^2 \end{cases} \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0, 1].$$

3° Étudier les variations des fonctions f_1 et g_1 sur [0, 1] et rassembler les résultats dans un tableau unique.

4° Préciser les coordonnées des points de la courbe C_1 où les tangentes sont parallèles aux axes de coordonnées.

5° Montrer que la droite (AB) est tangente à la courbe C_1 au point A.

6° Tracer la tangente (AB) et la courbe C_1 dans le repère donné au début de l'énoncé.

B. Étude géométrique et construction d'une courbe de Bézier C_2

On considère la courbe de Bézier C_2 définie par les trois points de définition $E(-2, 0)$; $F(-3, 1)$ et $A(0, 1)$, dans cet ordre.

Les deux résultats suivants n'ont pas à être démontrés.

- Un système d'équations paramétriques de la courbe C_2 est :

$$\begin{cases} x = f_2(t) = -2 - 2t + 4t^2 \\ y = g_2(t) = 2t - t^2 \end{cases} \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0, 1].$$

- Le tableau de variations conjointes des fonctions f_2 et g_2 est le suivant :

t	0		$\frac{1}{4}$		1
$f_2'(t)$	-2	$-$	0	$+$	6
$f_2(t)$	-2	$\searrow$	$-2{,}25$	$\nearrow$	0
$g_2'(t)$	2		$+$		0
$g_2(t)$	0	$\nearrow$			1

1° Construire sur la figure de la partie A le point M_0 tel que $\overrightarrow{EM_0} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$, le point M_1 tel que $\overrightarrow{FM_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FA}$ et le point R tel que $\overrightarrow{M_0R} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M_0M_1}$.

2° Calculer les coordonnées des points M_0, M_1 et R.

3° Montrer que le point R est le point de la courbe C_2 de paramètre $\frac{1}{2}$.

4° Montrer que la droite (AF) est tangente à la courbe C_2 au point A.

5° Montrer que les courbes C_1 et C_2 ont la même tangente au point A.

6° Tracer la courbe C_2 sur la même figure que la courbe C_1.